

Cinemática de Manipuladores Robóticos

Tabla de Contenido

CINEMÁTICA DE ROBOTS MANIPULADORES	5
ASPECTOS DE RESALTAR EN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO	6
<i>La Representación Denavit-Hartenberg (1955)</i>	6
Procedimiento para Asignación del Sistema de Coordenadas de los Elementos	7
Interpretación Geométrica de las Matrices de Transformaciones Homogéneas	11
LA SOLUCIÓN CINEMÁTICA DIRECTA.....	12
<i>El Grafo de Transformaciones Espaciales para un Manipulador</i>	14
LA SOLUCIÓN CINEMÁTICA INVERSA	21
<i>Solubilidad</i>	22
<i>Método Algebraico Cerrado</i>	23
<i>Método Geométrico Cerrado</i>	36
RELACIONES DIFERENCIALES	40
<i>Traslaciones y Rotaciones diferenciales</i>	40
<i>El Jacobiano de un Manipulador</i>	43
CINEMÁTICA DE VELOCIDADES	53
CINEMÁTICA DE ACELERACIONES	54
SINGULARIDADES CINEMÁTICAS	55
PRECISIÓN Y REPETIBILIDAD	56
<i>Precisión y Repetibilidad en Distancia</i>	61
ALGORITMOS	65
REFERENCIAS	66
GLOSARIO DE TÉRMINOS	67
INDICE.....	68

Lista de Ejemplos

EJEMPLO 1 CINEMÁTICA DIRECTA PARA EL MANIPULADOR STANFORD.....	16
EJEMPLO 2 CINEMÁTICA DIRECTA PARA UN MANIPULADOR DE ARTICULACIONES ROTACIONALES	18
EJEMPLO 3 CINEMÁTICA DIRECTA PARA EL MANIPULADOR MITSUBISHI RV-M1	19
EJEMPLO 4 CINEMÁTICA INVERSA PARA EL MANIPULADOR STANFORD.....	25
EJEMPLO 5 CINEMÁTICA INVERSA PARA EL MANIPULADOR DE ARTICULACIONES ROTACIONALES	30
EJEMPLO 6 CINEMÁTICA INVERSA PARA EL MANIPULADOR MITSUBISHI RV-M1	34
EJEMPLO 7 EL JACOBIANO PARA EL MANIPULADOR STANFORD.....	45
EJEMPLO 8 EL JACOBIANO PARA EL MANIPULADOR MITSUBISHI RV-M1	49

Lista de Figuras

FIGURA 1 EL PROBLEMA CINEMÁTICO	5
FIGURA 2 EL PROBLEMA CINEMÁTICO EN MANIPULADORES (REPRESENTACIÓN PUMA 260)	5
FIGURA 3 EFECTOR FINAL, MANO CON DEDOS PARALELOS	13
FIGURA 4 GRAFO DE TRANSFORMACIONES ESPACIALES	14
FIGURA 5 ROBOT MANIPULADOR STANFORD	16
FIGURA 6 MANIPULADOR DE ARTICULACIONES ROTACIONALES	18
FIGURA 7 FOTO Y ESQUEMÁTICO (ESPACIO DE ARTICULACIONES) DEL MITSUBISHI RV-M1 ...	20
FIGURA 8 DIMENSIONES EXTERNAS DEL RV-M1 (REIMPRESO DEL MANUAL DE USUARIO)	20
FIGURA 9 ESQUEMÁTICO DEL ROBOT RV-M1 SOBRE EL PLANO XZ	37
FIGURA 10 ESQUEMÁTICO DE SOLUCIÓN PARA θ_{4-5} DEL ROBOT MITSUBISHI RV-M1	38
FIGURA 11 MOVIMIENTO DIFERENCIAL (EXPRESANDO EL JACOBIANO)	45
ILUSTRACIÓN 1 ASIGNACIÓN DE PARÁMETROS CINEMÁTICOS SEGÚN LA METODOLOGÍA DE DENAVID-HARTENBERG	7
ILUSTRACIÓN 2 LA REPRESENTACIÓN DE LA UBICACIÓN DEL EFECTOR FINAL POR MEDIO DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA	12
ILUSTRACIÓN 3 PRECISIÓN Y REPETIBILIDAD EN POSICIÓN	57
ILUSTRACIÓN 4 PRECISIÓN Y REPETIBILIDAD EN ORIENTACIÓN	57
ILUSTRACIÓN 5 VARIACIÓN DE PRECISIÓN EN POSE MULTIDIRECCIONAL (VAP)	60
ILUSTRACIÓN 6 PRECISIÓN EN DISTANCIA	61

Cinemática de Robots Manipuladores

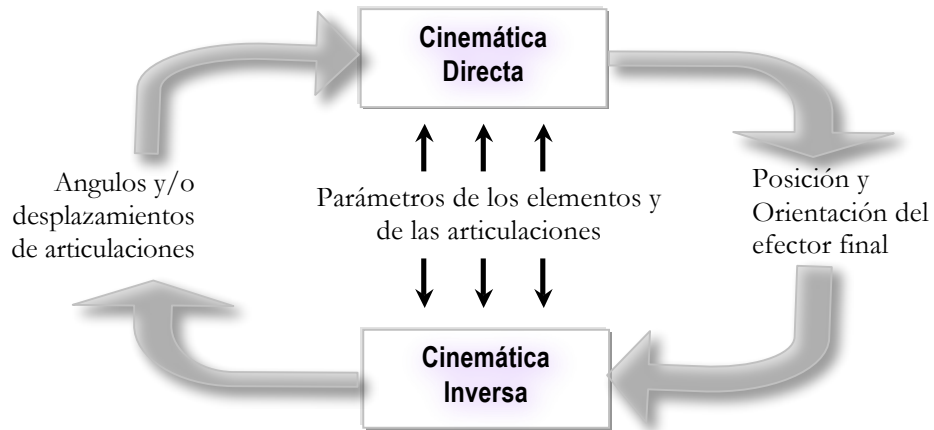


Figura 1 El Problema Cinemático

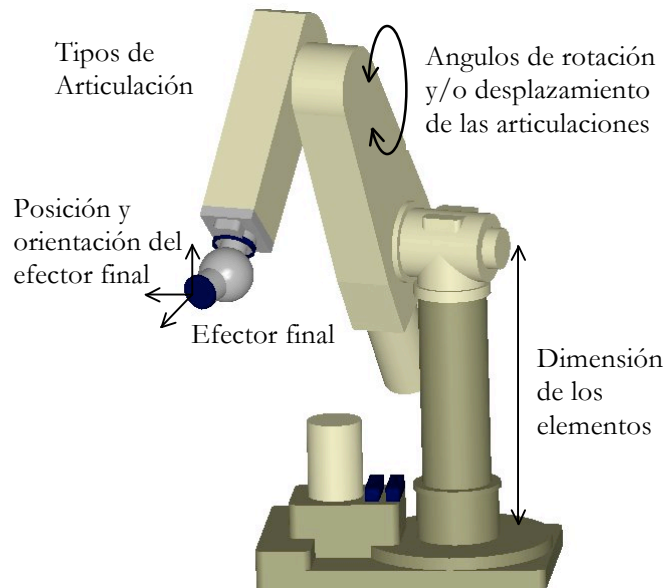


Figura 2 El problema cinemático en Manipuladores (representación Puma 260)

La cinemática de un manipulador trata con el estudio de la geometría de su movimiento en función del tiempo (posiciones, velocidades y aceleraciones), sin considerar las fuerzas que originan dicho movimiento.

Como se describe en la Figura 1, el problema cinemático puede dividirse en dos:

1. **Cinemática Directa:** A partir de un conjunto de parámetros físicos, que definen la geometría de un manipulador dado, y de los ángulos (asumiendo articulaciones de tipo rotacional) y/o desplazamientos (asumiendo articulaciones de tipo traslacional) articulares se halla la posición y orientación del efector final en el espacio tridimensional.

2. Cinemática Inversa: A partir de un conjunto de parámetros físicos, que definen la geometría de un manipulador dado, y de una posición y orientación específica del efector final se halla el conjunto de ángulos y/o desplazamientos articulares que dan como resultado dicha posición y orientación del efector final.

Aspectos de resaltar en la solución del problema cinemático

- Es más usual el modelo cinemático inverso, debido a que las tareas más frecuentes en los manipuladores o robots implican posicionamiento de su efector final, o de alguna otra de sus partes.
- El desplazamiento espacial total del efector final se debe a las rotaciones/traslaciones de los elementos anteriores (dado un sistema de coordenadas de referencia). Esto se asume debido a que un manipulador es un conjunto de cuerpos ligados o acoplados por articulaciones.
- Denavit y Hartenberg (1955) proponen un método para describir y representar la geometría espacial de los elementos de un brazo con respecto a un sistema de coordenadas fijo a través de matrices de transformación de 4×4 , y reducen el problema directo a encontrar la relación entre el desplazamiento espacial del sistema de coordenadas del efector final y el sistema de coordenadas de referencia.

La Representación Denavit-Hartenberg (1955)

Denavit y Hartenberg proponen un modelo matricial para establecer de forma sistemática un sistema de coordenadas (ligado al cuerpo) para cada elemento de una cadena articulada.

D-H resulta en una matriz de transformación homogénea de 4×4 que representa cada uno de los sistema de coordenadas de los elementos de la articulación con respecto al sistema de coordenadas del elemento previo. Mediante transformaciones secuenciales, el efector final expresado en las coordenadas de la mano se puede transformar y expresar en las coordenadas de la base. *La ventaja de utilizar la representación D-H es su universalidad algorítmica para derivar las ecuaciones cinemáticas de un brazo.*

Las reglas para determinar cada sistema son

- El eje \hat{z}_{i-1} yace a lo largo del eje de la articulación
- El eje x_i es normal al eje \hat{z}_{i-1} y apunta hacia afuera de el.

- El eje y_i completa el sistema de coordenadas dextrogiro según se requiera

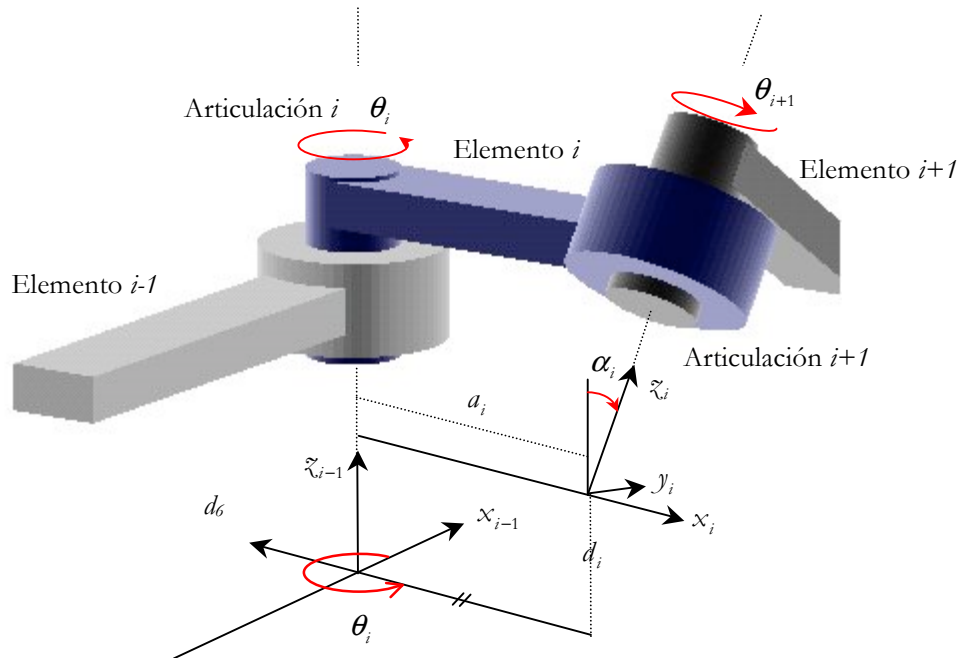


Ilustración 1 Asignación de parámetros cinemáticos según la metodología de Denavit-Hartenberg

La representación D-H de un elemento rígido depende de 4 parámetros geométricos asociados con cada elemento (ver Ilustración 1).

θ_i :Ángulo de la articulación del eje x_{i-1} al eje x_i respecto del eje z_{i-1} (RMD)

d_i :Distancia desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i a lo largo del eje z_{i-1} .

a_i :Distancia de separación desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i hasta el origen del sistema i-ésimo a lo largo del eje x_i (o la distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i cuando los ejes de articulación son paralelos)

α_i :Ángulo de separación del eje z_{i-1} al eje z_i respecto del eje x_i (RMD)

Procedimiento para Asignación del Sistema de Coordenadas de los Elementos

Dado un brazo con n grados de libertad, este algoritmo asigna un sistema de coordenadas ortonormal a cada elemento del brazo. El etiquetado del sistema de coordenadas comienza desde la base soporte hasta el efector

final del brazo. Las relaciones entre los elementos adyacentes se pueden representar mediante una matriz de transformación homogénea 4 x 4. (La asignación de los sistemas de coordenadas no es única). (Fu, et al.)

REDACTAR DIFERENTE

1. Establecer el sistema de coordenadas de la base. Ortonormal dextrogíro (x_0, y_0, z_0) en la base con el eje z_0 a lo largo del eje de movimiento de la articulación 1 y apuntando hacia afuera del brazo.
2. Establecer los ejes de la articulación. Alinear el z_i con el eje de movimiento de la articulación $i+1$. Repetir para cada i , donde $i = 1, \dots, n-1$.
3. Establecer el origen del sistema de coordenadas i -ésimo. Localizar el origen del sistema de coordenadas i -ésimo en la intersección de los ejes z_i y z_{i-1} o en la intersección de las normales comunes entre los ejes z_i y z_{i-1} y el eje z_i .
4. Establecer el eje $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i) / \|z_{i-1} \times z_i\|$ o a lo largo de la normal común entre los ejes z_{i-1} y z_i cuando son paralelos.
5. Establecer el eje $y_i = \pm(z_i \times x_i) / \|z_i \times x_i\|$ para completar el sistema de coordenadas dextrogíro. Extender si es necesario los ejes z_i y x_i para realizar los pasos 9-12.
6. Establecer el sistema de coordenadas de la mano. Normalmente la articulación n -ésima es de tipo giratorio. Establecer z_n a lo largo de la dirección del eje z_{n-1} y apuntando hacia afuera del robot. Establecer x_n tal que sea normal a ambos ejes z_{n-1} y z_n . Asignar y_n para complementar el sistema de coordenadas dextrógiro.
7. Encontrar los parámetros de la articulación y del elemento. Para $i, i = 1, \dots, n$, realizar los pasos 9 a 12.
8. Encontrar d_i o la distancia del origen del sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo a la intersección del eje z_{i-1} y el eje x_i a lo largo del eje z_{i-1} .
9. Encontrar a_i o la distancia del origen del sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo a la intersección del eje z_{i-1} y el eje x_i a lo largo del eje x_i o la distancia entre los ejes z_{i-1} y z_i cuando éstos son paralelos.

10. Encontrar θ_i o el ángulo de rotación desde el eje x_{i-1} hasta el eje x_i respecto del eje z_{i-1} . Es la variable de articulación si i es giratoria.
11. Encontrar α_i o el ángulo de rotación desde el eje z_{i-1} hasta el eje z_i respecto del eje x_i .

Una vez establecido el sistema de coordenadas D-H para cada elemento, se puede desarrollar fácilmente una matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas i -ésimo con el sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo. Para lograr expresar un punto cualquiera del sistema de coordenadas i -ésimo en términos del sistema de coordenadas anterior se proponen las siguientes transformaciones sucesivas:

1. Girar respecto del eje z_{i-1} un ángulo θ_i para alinear el eje x_{i-1} con el eje x_i (x_{i-1} es paralelo a x_i y apunta en la misma dirección).
2. Trasladar a lo largo del eje z_{i-1} una distancia de d_i para llevar en coincidencia los ejes x_{i-1} y x_i .
3. Trasladar a lo largo del eje x_i una distancia a_i para traer en coincidencia también los dos orígenes de los ejes x .
4. Girar respecto del eje x_i un ángulo α_i para traer en coincidencia a los sistemas de coordenadas.

Se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones respecto de las propiedades matriciales.

La inversa de una matriz de transformación homogénea 4x4 no es igual a su traspuesta, como es el caso en las matrices de rotación 3x3 básicas.

La multiplicación de matrices no es conmutativa, por lo cual es importante considerar secuencias específicas de multiplicación cuando se quieren obtener matrices compuestas que representan transformaciones compuestas. Para ello se sugiere el siguiente procedimiento:

- Iniciar con la matriz de identidad $U \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.
- Si la transformación requerida sobre un sistema de coordenadas i dado se hace con referencia al sistema de coordenadas previo, $i-1$, pre-multiplicar la matriz resultante por la transformación deseada.
- Si la transformación requerida sobre un sistema de coordenadas i dado se hace con referencia a sí mismo, pos-multiplicar la matriz resultante por la transformación deseada.

El procedimiento anterior se puede expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 A_i^{i-1} &= T_{\tilde{z},d} T_{\tilde{z},\theta} U T_{x,a} T_{x,\alpha} \\
 T_{\tilde{z},d} T_{\tilde{z},\theta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen} \theta_i & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 T_{x,a} T_{x,\alpha} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\text{sen} \alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_i^{i-1} &= \begin{bmatrix} \boxed{\cos \theta_i} & \boxed{-\cos \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i} & \boxed{\text{sen} \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i} & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \boxed{\text{sen} \theta_i} & \boxed{\cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i} & \boxed{-\text{sen} \alpha_i \cdot \cos \theta_i} & a_i \cdot \text{sen} \theta_i \\ \boxed{0} & \boxed{\text{sen} \alpha_i} & \boxed{\cos \alpha_i} & d_i \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Los subvectores columna $\in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ marcados en la ecuación (2.1) corresponden a las proyecciones de los ejes rotados u, v, w , respectivamente, sobre los ejes de referencia que se denominarán simplemente como x, y, z . Para el caso de articulaciones prismáticas la traslación en a_i no se requiere, lo cual simplifica la matriz al reducir los elementos 1,4 y 2,4 a cero. Es decir,

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & \text{sen} \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & 0 \\ \text{sen} \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\text{sen} \alpha_i \cdot \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

La inversa de la matriz homogénea sirve en estos casos para definir una transformación, $\mathbf{p}_{uvw} = \mathcal{Q} \mathbf{p}_{xyz}$, que puede emplearse para la propagación en sentido contrario de los parámetros cinemáticos. Para el caso de articulaciones rotacionales,

$$[A_i^{i-1}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \text{sen} \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & \text{sen} \alpha_i & -d_i \cdot \text{sen} \alpha_i \\ \text{sen} \alpha_i \cdot \text{sen} \theta_i & -\text{sen} \alpha_i \cdot \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cdot \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} [R_{3 \times 3}]^T & \begin{bmatrix} -\hat{u}^T \hat{p} \\ -\hat{v}^T \hat{p} \\ -\hat{w}^T \hat{p} \end{bmatrix} \\ perspectiva_{1 \times 3} & escalado_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{3 \times 3}]^T & -[R_{3 \times 3}]^T \hat{p} \\ perspectiva_{1 \times 3} & escalado_{1 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

$$\text{Donde, } \hat{p} = \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix}.$$

Es importante observar que no hay dependencia de θ_i para la translación en la ecuación (2.3). Es decir, no hay dependencia de la postura del manipulador !!!

Interpretación Geométrica de las Matrices de Transformaciones Homogéneas

- Cada vector columna de la submatriz 3x3 superior izquierda, es una representación del vector unitario del eje rotado (de OUVW) expresado en términos de los vectores unitarios de los ejes del sistema de referencia, y cada vector fila de la misma submatriz es una representación del vector unitario de los ejes de referencia expresado en función de los vectores unitarios de los ejes rotados del sistema OUVW.
- Como cada fila y columna, de la submatriz de 3x3, es una representación de un vector unitario, la magnitud de cada una de ellas debería ser igual a 1 (sistema de coordenadas ortonormal). El determinante de una matriz de rotación es +1 para un sistema dextrógiro y -1 para uno levógiro.
- Como cada fila de la submatriz de 3x3 es una representación vectorial de vectores ortonormales, el producto interno (producto escalar) de cada fila por cualquier otra fila es igual a cero. Análogamente para el producto interno entre columnas.
- La inversa de dicha submatriz de rotación 3x3 es la traspuesta de sí misma (condición de ortogonalidad).
- El vector cuarta columna de la matriz de transformación homogénea representa la posición del origen del sistema OUVW con respecto al sistema de referencia. En otras palabras, la matriz completa de transformación homogénea representa la posición y orientación del sistema OUVW con respecto al sistema de referencia.
- La inversa de una matriz de transformación homogénea no es equivalente a su traspuesta. La posición del origen del

sistema de referencia con respecto al sistema OUVW se puede deducir solamente después de que se determine la inversa de la matriz de transformación homogénea definida en (2.4).

La matriz de transformación homogénea puede construirse empleando cualquiera de las matrices básicas o compuestas de rotación, presentadas en la sección anterior.

La Solución Cinemática Directa

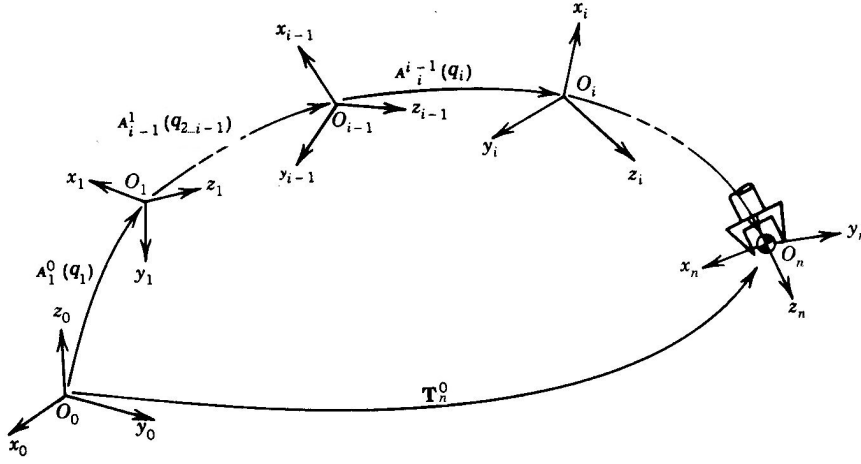


Ilustración 2 La representación de la ubicación del efector final por medio de la matriz de transformación homogénea

Utilizando la notación de Denavit y Hartenberg se puede expresar la posición y orientación del efector final del manipulador en función del desplazamiento de sus articulaciones. El desplazamiento articular es un ángulo (θ_i) o una distancia (d_i), dependiendo del tipo de articulación. Para cualquier manipulador, de tipo cadena serial con n articulaciones, se representa la solución cinemática directa a partir de sus matrices de transformación homogénea de la siguiente forma:

$$T_n^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot \dots \cdot A_n^{n-1}, \quad (2.5)$$

$$T_n^0 = \prod_{j=1}^n A_j^{j-1}. \quad (2.6)$$

Donde,

$$T_n^0 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

La matriz anterior representa la orientación y posición del efector final del manipulador (ver Ilustración 2). Donde los vectores unitarios de orientación corresponden a:

- $p_{x,y,z}$: Vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenada n -ésimo.
- a : vector de aproximación de la mano. Apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la mano hacia el origen del sistema de coordenadas asociado al objeto a manipular o una posición espacial predefinida. (Suele ser localizado en el punto central de los dedos cerrados).
- o : vector de orientación de la mano. Apunta en la dirección del movimiento de los dedos (caso ejes paralelos).
- n : Vector normal de la mano. Suponiendo una mano tipo mordaza paralela ortogonal a los dedos del brazo del robot.

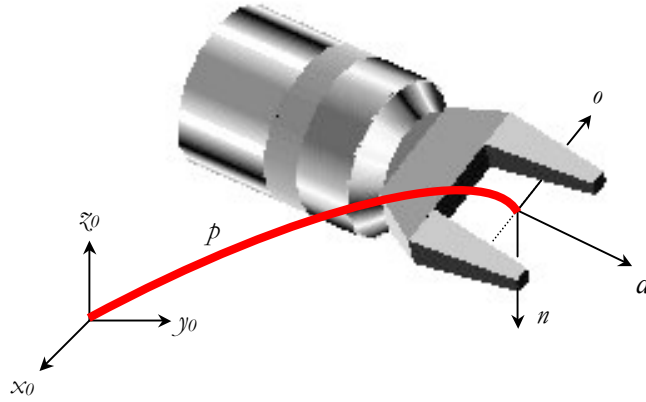


Figura 3 Efector final, mano con dedos paralelos

Distinguiendo las operaciones de translación y rotación, la ecuación (2.6) puede expresarse en forma matricial de bloque de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} r_1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 & p_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} r_n & p_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_n^0 & P_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r_1 r_2 L & r_n & p_1 + r_1 p_2 + L & + (r_1 r_2 L \dots r_{n-1}) p_n \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} n_{3 \times 1} & o_{3 \times 1} & a_{3 \times 1} & p_{3 \times 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Donde,

$$R_n^0 = \prod_{i=1}^n r_i, \tag{2.9}$$

$$P_n^0 = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=i}^{n-1} r_j \right) p_i. \quad (2.10)$$

El Grafo de Transformaciones Espaciales para un Manipulador

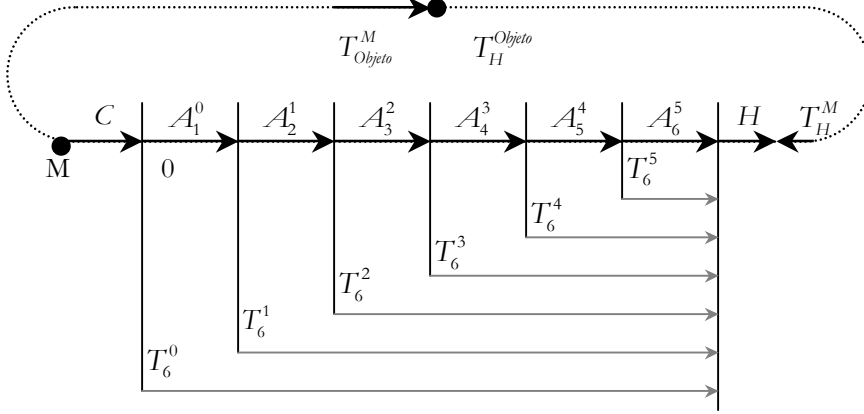


Figura 4 Grafo de Transformaciones Espaciales

Como se ha descrito, la composición de diversas y distintas transformaciones pueden ayudarnos a definir la localización espacial de un objeto o de un sistema de coordenadas asociado respecto de un manipulador (en cualquiera de sus ejes o articulaciones). Esta relación puede describirse mediante un grafo de transformaciones como el de la Figura 4 [8].

Suponiendo un manipulador de seis grados de libertad, la descripción del extremo final del manipulador (sistema de coordenadas 6), respecto del sistema de coordenadas asociado con el elemento $i-1$ está dado por $T_6^{i-1} = A_i A_{i+1} \dots A_6$. El extremo final del manipulador se relaciona con la base a través de la transformación T_6^0 (ecuación (2.6)).

Si el manipulador se relaciona con un sistema de coordenadas de referencia M por medio de la transformación C , y si además tiene una herramienta ligada a su extremo final descrita por una transformación H , entonces la posición y orientación del extremo final de la herramienta respecto del sistema de coordenadas de referencia se describe como:

$$T_H^M = C T_6^0 H. \quad (2.11)$$

Por ende,

$$T_6^0 = C^{-1} T_H^M H^{-1}. \quad (2.12)$$

De la misma manera un objeto referido al sistema de coordenadas M puede describirse con respecto a la base del robot,

$$T_{Objeto}^0 = T_6^0 H \left(T_H^{Objeto} \right)^{-1}, \quad (2.13)$$

o bien por,

$$T_{Objeto}^0 = C^{-1} T_{Objeto}^M. \quad (2.14)$$

Cualquier otra relación puede ser obtenida directamente a partir del grafo. Partiendo del objeto inicial hasta el final multiplicando las matrices de transformación correspondientes, definidas por los arcos en el grafo, y considerando que de recorrerse éstos en el sentido contrario a la transformación indicada deberá multiplicarse por la matriz inversa de la respectiva transformada.

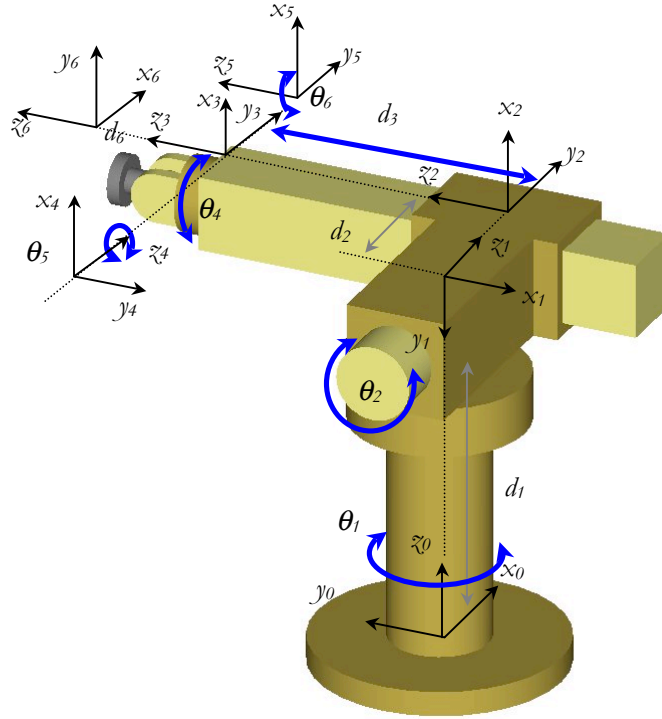


Figura 5 Robot Manipulador Stanford

Los parámetros DH para el manipulador Stanford se indican a continuación en la Tabla 1. Para simplificar la solución cinemática se asume que $d_1 = 0$, siendo necesario sumar ésta cantidad en translación sobre el eje z_1 positivo al resultado obtenido. Igualmente para $d_6 = 0$.

Elemento	α_i	a_i	θ_i	d_i
1	-90	0	$\theta_1 = -90$	0
2	90	0	$\theta_2 = -90$	d_2
3	0	0	0	d_3
4	-90	0	$\theta_4 = 0$	0
5	90	0	$\theta_5 = 0$	0
6	0	0	$\theta_6 = 90$	0

Tabla 1 Parámetros DH para manipulador Stanford

Las matrices de transformación homogéneas correspondientes a los parámetros de la Tabla 1 son:

$$\begin{aligned}
 A_1^0 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2^1 &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4^3 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_5^4 &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6^5 &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Donde, $s_i = \text{sen}(\theta_i)$ y $c_i = \text{cos}(\theta_i)$

La cinemática directa que relaciona el elemento 6 con la base se define a partir de la aplicación de la ecuación (2.5).

Igualando, elemento por elemento, la ecuación (2.5) con la ecuación (2.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 n_x &= c_1 \left[c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6 \right] - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\
 n_y &= s_1 \left[c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6 \right] - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\
 n_z &= -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \\
 o_x &= c_1 \left[-c_2 (c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) - s_2 s_5 c_6 \right] - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\
 o_y &= s_1 \left[-c_2 (c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) - s_2 s_5 c_6 \right] - c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\
 o_z &= s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \\
 a_x &= c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_4 c_5) + s_1 s_4 s_5 \\
 a_y &= s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_4 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\
 a_z &= -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_x &= c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\
 p_y &= s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 \\
 p_z &= c_2 d_3
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Ejemplo 2 Cinemática Directa para un Manipulador de Articulaciones Rotacionales

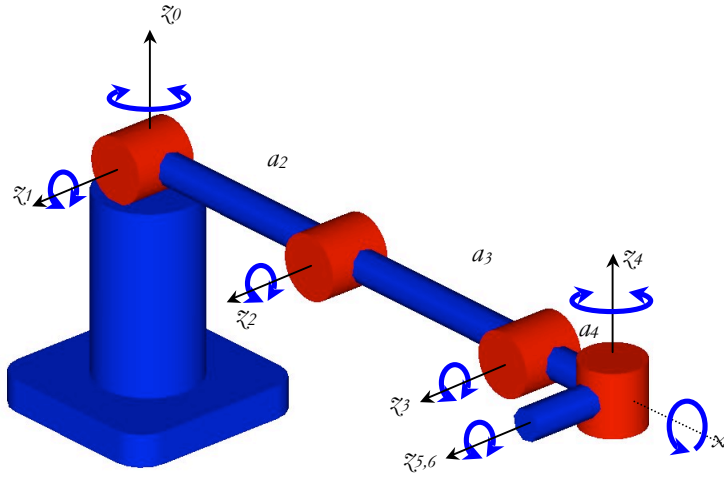


Figura 6 Manipulador de articulaciones rotacionales

Los parámetros DH para el manipulador ejemplificado se indican a continuación:

Elemento	α_i	a_i	θ_i	d_i
1	90	0	θ_1	0
2	0	a_2	θ_2	0
3	0	a_3	θ_3	0
4	-90	a_4	θ_4	0
5	90	0	θ_5	0
6	0	0	θ_6	0

Tabla 2 Parámetros DH para Manipulador de articulaciones rotacionales

Las matrices de transformación homogéneas correspondientes son:

$$\begin{aligned}
 A_1^0 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2^1 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 a_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3^2 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 a_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & s_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4^3 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & c_4 a_4 \\ s_4 & 0 & c_4 & s_4 a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_5^4 &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6^5 &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

La cinemática directa que relaciona el elemento 6 con la base está dada por

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} c_1 [c_{234} c_5 c_6 + s_{234} c_6] - s_1 s_5 s_6 & -c_1 [c_{234} c_5 c_6 + s_{234} c_6] + s_1 s_5 s_6 & & & & \\ s_1 [c_{234} c_5 c_6 + s_{234} c_6] + c_1 s_5 s_6 & -s_1 [c_{234} c_5 c_6 + s_{234} c_6] - c_1 s_5 s_6 & & & & \\ s_{234} c_5 s_6 - c_{234} c_6 & -s_{234} c_5 s_6 + c_{234} c_6 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 [c_{234} a_4 + c_{23} a_3 + c_2 a_2] & & & & \\ s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 [c_{234} a_4 + c_{23} a_3 + c_2 a_2] & & & & \\ s_{234} s_5 & s_{234} a_4 + s_{23} a_3 + s_2 a_2 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Se puede verificar claramente que los vectores n y o son normales entre sí.

Ejemplo 3 Cinemática Directa para el Manipulador Mitsubishi RV-M1

El manipulador Mitsubishi RV-M1 tiene una configuración serial de 5 grados de libertad. Sus articulaciones son todas de tipo rotacional.

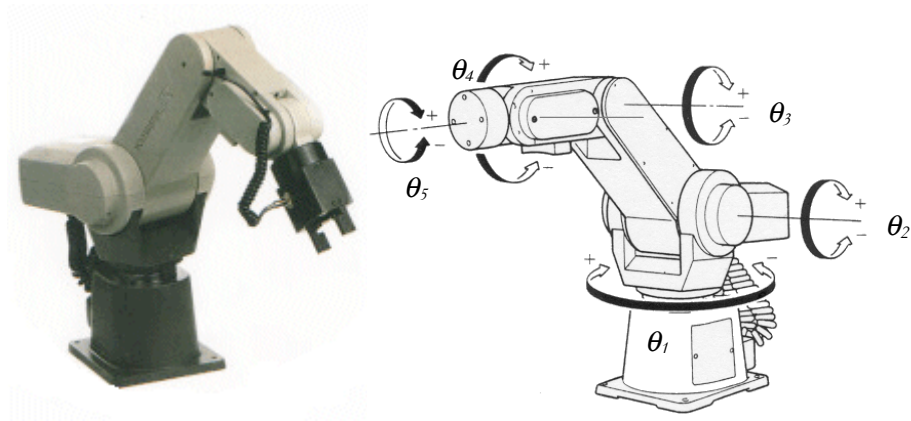


Figura 7 Foto y esquemático (espacio de articulaciones) del Mitsubishi RV-M1

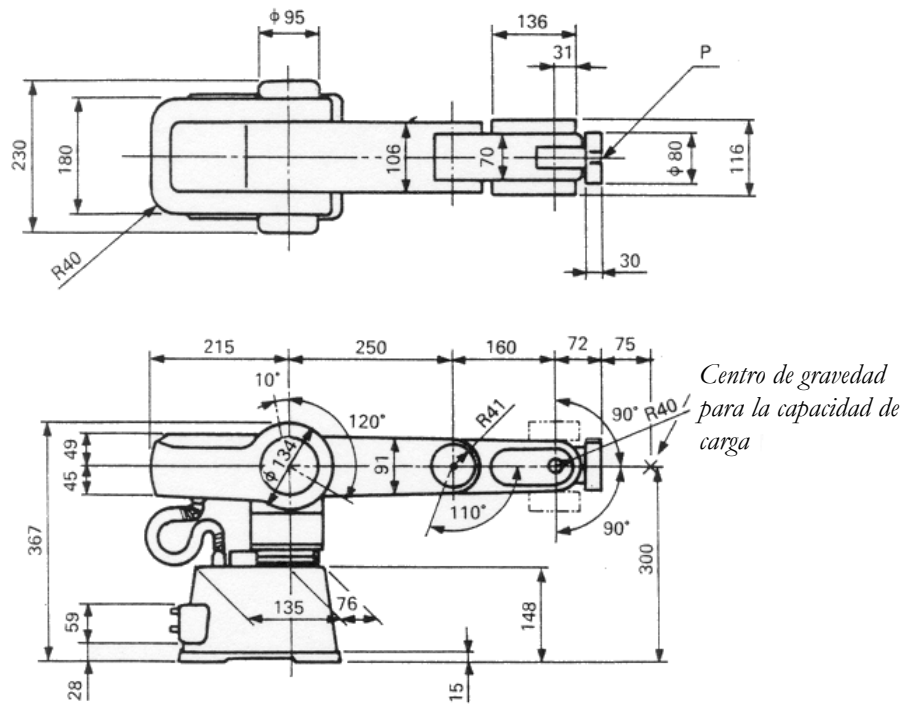


Figura 8 Dimensiones externas del RV-M1 (reimpreso del Manual de Usuario)

Los parámetros DH para el manipulador ejemplificado se indican a continuación:

Elemento	α_i	a_i	θ_i	d_i
1	90	0	θ_1	300
2	0	250	θ_2	0
3	0	160	θ_3	0
4	90	0	θ_4	0
5	0	0	θ_5	147

Tabla 3 Parámetros DH para el Manipulador Mitsubishi RV-M1

Las matrices de transformación homogéneas correspondientes son:

$$\begin{aligned}
 A_1^0 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_2^1 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 250 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 250 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_3^2 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 160 \cdot c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 160 \cdot s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_4^3 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_5^4 &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

La matriz que relaciona el sistema de coordenadas de referencia con el efector final está dada por:

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 & -c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 s_{234} & c_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \\ s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 & -s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 s_{234} & s_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \\ s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & -c_{234} & 300 - 147 \cdot c_{234} + 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

La solución Cinemática Inversa

Típicamente un robot se controla en el espacio de las variables de articulación, mientras que los objetos a manipular suelen expresarse en el espacio de coordenadas cartesianas. Por esta razón y con el fin de controlar la posición y orientación del efector final de un robot para alcanzar un objeto, es más frecuente la necesidad de uso de la solución al problema cinemático inverso.

En un manipulador de seis grados de libertad, dada la posición y orientación del efector final T_6^0 y los parámetros de las articulaciones y los elementos, se requiere encontrar los ángulos de articulación correspondientes, $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$, de manera que se pueda posicionar y orientar arbitrariamente el efector final (asumiendo la existencia de una solución). El problema a resolver consiste en encontrar la solución de un conjunto no lineal de n ecuaciones trascendentales (para un manipulador de n grados de libertad) con n incógnitas. Dado el valor numérico de T_6^0 , representado en dieciséis valores a partir de su representación en forma de matriz de transformación homogénea se buscan

valores de solución para cada variable de articulación (6 en total). De las dieciséis ecuaciones, nueve ecuaciones surgen de la transformación rotacional, tres de la transformación traslacional y las demás, perspectiva y escalado, pueden descartarse para la solución de este problema particular. De las nueve ecuaciones que surgen por rotación solo tres son independientes para un robot de seis grados de libertad, y sumadas éstas a las tres que surgen por traslación se tendrían seis ecuaciones con seis incógnitas.

El problema entonces se expresa en dos partes, determinar la existencia de una solución, o múltiples soluciones por la naturaleza de las ecuaciones y, comprobada la existencia de solución, encontrar un método para resolverlas eficientemente.

Un manipulador debe tener al menos seis grados de libertad para poder ubicar su efector final en un punto arbitrario con una orientación arbitraria en el espacio. Manipuladores con menos de seis grados de libertad no cumplen este criterio. De otro lado, manipuladores con más de seis grados de libertad tienen un número infinito de soluciones para su ecuación cinemática y se conocen como *manipuladores redundantes*.

Solubilidad

La existencia de soluciones puede determinarse a partir del espacio de trabajo del manipulador. Entendiendo por espacio de trabajo, como el volumen de espacio que puede ser alcanzable por el efector final del manipulador. La condición necesaria para la existencia de al menos una solución es que la localización del efector final yacza en el espacio de trabajo alcanzable. Ciertamente, los extremos del volumen de trabajo limitan la dexteridad del brazo al no permitir configuraciones arbitrarias del efector final. El subconjunto de soluciones alcanzable con una orientación arbitraria del efector se conoce como espacio de trabajo dextroso. Un manipulador se considera solucionable cuando el conjunto de variables puede ser determinado mediante un algoritmo que permita encontrar todos los conjuntos de variables de articulación asociados con una posición y orientación [3].

Un enfoque general para resolver sistemáticamente el problema cinemático inverso es el de considerar el conjunto de ecuaciones no lineales como un polinomio multivariado en $s_i = \sin(\theta_i)$ y en $c_i = \cos(\theta_i)$ para todas los grados de libertad [3,7]. Esto es posible porque las entradas en cada matriz de transformación homogénea es unitaria en s_i y en c_i . Entonces, se eliminan de manera sistemática $n-1$ variables en un sistema de n polinomios en n variables para obtener un solo polinomio de una sola variable. Este método se conoce como *eliminación dialítica*, y el polinomio resultante se conoce como el polinomio característico. Determinando las raíces de este polinomio se pueden encontrar las variables eliminadas a partir de un conjunto lineal de ecuaciones.

En general, se requieren por lo menos seis articulaciones para obtener una posición y orientación arbitraria en el espacio tridimensional de las tareas (tres de rotación y tres de traslación). La existencia de una solución analítica cerrada al problema cinemático inverso depende del orden del polinomio característico. Solo para un polinomio de orden cuatro o menor es posible encontrar una solución analítica, dado que las raíces pueden obtenerse como funciones algebraicas de los coeficientes del polinomio. En caso contrario, debe recurrirse a una solución numérica iterativa, y se considera que el problema solo puede ser solucionable si: 1) existe un límite superior en el número de soluciones existentes y 2) existe un algoritmo eficiente para calcular todas las soluciones. Selfridge [4] encontró que todos los manipuladores de cadena abierta de 6 grados de libertad con articulaciones prismáticas o rotacionales son solucionables. El número de soluciones depende del número de articulaciones prismáticas y de los parámetros cinemáticos [5]. Como ejemplo, un manipulador 6R con tres articulaciones consecutivas intersectantes en un punto común [2] o con tres ejes de articulación paralelos [6] tiene al menos 8 posibles configuraciones y su polinomio es de grado cuatro. Con la existencia de múltiples soluciones es usual determinar heurísticamente cual es la más apropiada para una configuración de brazo particular.

Como se deduce del texto anterior, se distinguen principalmente dos clases de estrategias para formular la solución al problema cinemático inverso: soluciones cerradas y soluciones numéricas (que por su naturaleza iterativa no son óptimos en situaciones prácticas con exigencia de respuesta en tiempo real). En este contexto “solución cerrada” significa un método de solución basado en expresiones analíticas o en la solución de un polinomio de grado cuatro o menor, de tal manera que pueda hallarse su solución de manera no iterativa. A continuación se presentan ejemplos sobre dos métodos de forma cerrada (un método algebraico y uno geométrico) y posteriormente, una vez tratado el tema de movimientos diferenciales, se presentará un método iterativo.

Método Algebraico Cerrado

Como se discutió en la sección anterior sólo en casos especiales pueden los robots manipuladores resolverse de manera cerrada y analítica. Para ello el manipulador debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

- Tres ejes de articulación adyacentes intersectantes en un punto y/o muchos α_i iguales a 0 o ± 90 grados.
- Tres ejes de articulación adyacentes son paralelos entre sí (condición suficiente).

Las siguientes equivalencias trigonométricas son de gran utilidad para simplificar las expresiones matriciales a partir de las condiciones anteriores:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\text{sen}(b) \quad (2.21)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \sin(a+b+c) = & \sin(a)\cos(b)\cos(c) + \cos(a)\sin(b)\cos(c) - \\ & \sin(a)\sin(b)\sin(c) + \cos(a)\cos(b)\sin(c) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \cos(a+b+c) = & \cos(a)\cos(b)\cos(c) - \sin(a)\sin(b)\cos(c) - \\ & \sin(a)\cos(b)\sin(c) - \cos(a)\sin(b)\sin(c) \end{aligned} \quad (2.24)$$

El siguiente método se le atribuye a Paul [8] y consiste en encontrar cada variable de manera secuencial, aislando cada una mediante la premultiplicación las correspondientes transformadas inversas, como se indica en las ecuaciones (AQUÍ QUEDAMOS). Para el caso de un manipulador de 6 grados de libertad los productos de las transformaciones dadas en las matrices homogéneas 4x4, comenzando desde la articulación 6 hasta llegar a la base del robot están dados por (2.5); Seis ecuaciones matriciales se pueden obtener a partir de esta ecuación, pre-multiplicandola sucesivamente por las inversas de las matrices A.

$$(\mathcal{A}_1^0)^{-1} T_6^0 = T_6^1 \quad (2.25)$$

$$(\mathcal{A}_2^1)^{-1} (\mathcal{A}_1^0)^{-1} T_6^0 = T_6^2 \quad (2.26)$$

$$(\mathcal{A}_3^2)^{-1} (\mathcal{A}_2^1)^{-1} (\mathcal{A}_1^0)^{-1} T_6^0 = T_6^3 \quad (2.27)$$

$$(\mathcal{A}_4^3)^{-1} (\mathcal{A}_3^2)^{-1} (\mathcal{A}_2^1)^{-1} (\mathcal{A}_1^0)^{-1} T_6^0 = T_6^4 \quad (2.28)$$

$$(\mathcal{A}_5^4)^{-1} (\mathcal{A}_4^3)^{-1} (\mathcal{A}_3^2)^{-1} (\mathcal{A}_2^1)^{-1} (\mathcal{A}_1^0)^{-1} T_6^0 = T_6^5 \quad (2.29)$$

El procedimiento consiste en revisar los elementos del lado derecho de las ecuaciones (2.25)-(2.29), encontrar aquellos que sean cero o constantes, e igualarlos con los elementos respectivos del lado izquierdo de la ecuación.

La matriz homogénea T_i^0 que especifica la localización del sistema de coordenadas i -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base esta dada por;

$$T_i^0 = \mathcal{A}_1^0 \mathcal{A}_2^1 \cdots \mathcal{A}_i^{i-1} = \prod_{j=1}^i \mathcal{A}_j^{j-1} = \begin{bmatrix} R_i^0 & p_i^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

donde;

R_i^0 : Matriz de orientación del sistema de coordenadas i -ésimo establecido en el elemento i con respecto al sistema de coordenadas de la base. Es la submatriz superior izquierda de 3x3 de T_i^0 .

P_i^0 : Vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenada i -ésimo. Es la submatriz superior derecha 3x1 de T_i^0 .

Ejemplo 4 Cinemática Inversa para el Manipulador Stanford

$$\left(\mathcal{A}_1^0\right)^{-1} T_6^0 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\left(\mathcal{A}_1^0\right)^{-1} T_6^0 = \begin{bmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

donde los subíndices definen la fila y el paso de inversión según las ecuaciones (2.25)-(2.29), respectivamente,

$$f_{11}(k) = c_1 k_x + s_1 k_y \quad (2.33)$$

$$f_{21}(k) = -k_z \quad (2.34)$$

$$f_{31}(k) = -s_1 k_x + c_1 k_y \quad (2.35)$$

para $k = n, o, a, p$.

El lado derecho de la ecuación (2.25) se obtiene de la ecuación,

$$T_6^1 = \begin{bmatrix} c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6 & -c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6 & c_2c_4s_5 + s_2c_5 & s_2d_3 \\ s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_2s_5c_6 & -s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_2s_5s_6 & s_2c_4s_5 - c_2c_5 & -c_2d_3 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Todos los elementos del lado derecho de la ecuación (2.36) son funciones de $\theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5$ y θ_6 , excepto el elemento de la fila 3 columna 4. Igualamos los elementos 3,4 para obtener,

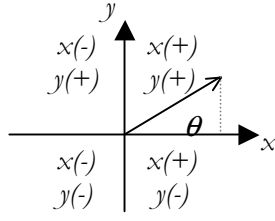
$$f_{31}(p) = d_2 \quad (2.37)$$

o

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_2 \quad (2.38)$$

Para resolver ecuaciones de esta forma, hacemos las siguientes substituciones trigonométricas,

$$p_x = r \cos \phi \quad (2.39)$$



$$p_y = r \sin \phi \quad (2.40)$$

Donde,

$$r = \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (2.41)$$

$$\phi = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (2.42)$$

Substituyendo para p_x y p_y en la ecuación (2.38) se obtiene,

$$\sin \phi \cos \theta_1 - \cos \phi \sin \theta_1 = d_2 / r \quad (2.43)$$

Con $0 < d_2 / r \leq 1$.

La ecuación (2.43) se reduce (por equivalencia) a,

$$\sin(\phi - \theta_1) = d_2 / r \quad (2.44)$$

Con $0 < \phi - \theta_1 \leq \pi$.

Se obtiene el coseno, de $\cos^2 + \sin^2 = 1$, como,

$$\cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - (d_2 / r)^2} \quad (2.45)$$

$$(\phi - \theta_1) = \text{atan2}\left(\pm \sqrt{1 - (d_2 / r)^2}, d_2 / r\right) \quad (2.46)$$

$$\theta_1 = \phi - \text{atan2}\left(\pm \sqrt{1 - (d_2 / r)^2}, d_2 / r\right) \quad (2.47)$$

donde el signo corresponde a una configuración de hombro izquierdo (-1) o derecho (+1). Finalmente reemplazando (2.42) en (2.47),

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}\left(\pm \sqrt{r^2 - d^2}, d_2\right) \quad (2.48)$$

Habiendo determinado θ_1 , la parte izquierda de la ecuación (2.32) ya se encuentra definida. Cuando se tenga definida alguna de las partes izquierdas de las ecuaciones (2.25)-(2.29) se buscan elementos del lado derecho que sean función de las coordenadas individuales de articulación. En este caso, los elementos 1,4 y 2,4 son funciones de $s_2 d_3$ y $c_2 d_3$ y tenemos,

$$s_2 d_3 = c_1 p_x + s_1 p_y \quad (2.49)$$

$$-c_2 d_3 = -p_z \quad (2.50)$$

Como se requiere que d_3 , la extensión de la articulación prismática, sea mayor que cero, tenemos valores proporcionales al seno y el coseno de θ_2 y podemos entonces obtener un valor único para θ_2 como

$$\theta_2 = \text{atan2}(p_z, c_1 p_x + s_1 p_y) \quad (2.51)$$

Evaluando los elementos de la ecuación (2.26) obtenemos

$$\begin{bmatrix} f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & 0 \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & 0 \\ f_{32}(n) & f_{32}(o) & f_{32}(a) & f_{32}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & 0 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ s_5 s_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Donde,

$$f_{12}(n) = c_2 (c_1 n_x + s_1 n_y) - s_2 n_z \quad (2.53)$$

$$f_{22}(n) = -s_1 n_x + c_1 n_y \quad (2.54)$$

$$f_{32}(n) = s_2 (c_1 n_x + s_1 n_y) + c_2 n_z \quad (2.55)$$

y podemos obtener una ecuación para d_3 igualando los elementos 3,4 como

$$d_3 = s_2 (c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2 p_z \quad (2.56)$$

Con la parte izquierda de la ecuación (2.26) definida, revisamos el lado derecho por funciones de variables simples. No se encuentra ninguna. La ecuación (2.27) tampoco aporta información nueva. Esto se debe principalmente a que el manipulador tiene articulaciones redundantes.

Evaluando los elementos de la ecuación (2.28) obtenemos

$$\begin{bmatrix} f_{14}(n) & f_{14}(o) & f_{14}(a) & 0 \\ f_{24}(n) & f_{24}(o) & f_{24}(a) & 0 \\ f_{34}(n) & f_{34}(o) & f_{34}(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Donde,

$$f_{14}(n) = c_4 \left[c_2 (c_1 n_x + s_1 n_y) - s_2 n_z \right] + s_4 \left[-s_1 n_x + c_1 n_y \right] \quad (2.58)$$

$$f_{24}(n) = -s_2 (c_1 n_x + s_1 n_y) - c_2 n_z \quad (2.59)$$

$$f_{34}(n) = -s_4 \left[c_2 (c_1 n_x + s_1 n_y) - s_2 n_z \right] + c_4 \left[-s_1 n_x + c_1 n_y \right] \quad (2.60)$$

Los elementos 3,3 nos dan una ecuación para θ_4

$$-s_4 \left[c_2 (c_1 n_x + s_1 n_y) - s_2 n_z \right] + c_4 \left[-s_1 n_x + c_1 n_y \right] = 0 \quad (2.61)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación $-\sin \phi a_x + \cos \phi a_y = 0$ resultando en dos soluciones

$$\theta_4 = \text{atan2} \left(c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z, -s_1 a_x + c_1 a_y \right) \quad (2.62)$$

$$\theta_4 = \theta_4 + 180^\circ$$

Si ambos numerador y denominador en la ecuación (2.62) van a cero, el manipulador se degenera. Examinando los elementos 1,3 y 2,3 de la ecuación (2.52) revela que la solución de θ_4 está en términos de $s_4 s_5$ y $c_4 s_5$

$$c_4 s_5 = c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z \quad (2.63)$$

$$s_4 s_5 = -s_1 a_x + c_1 a_y \quad (2.64)$$

Entonces,

$$\theta_4 = \text{atan2} \left(c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z, -s_1 a_x + c_1 a_y \right) \quad (2.65)$$

Si $\theta_5 > 0$ y $\theta_4 = \theta_4 + 180^\circ$

Si $\theta_5 < 0$. Esto corresponde a dos configuraciones del manipulador. Cuando $s_5 = 0, \theta_5 = 0$ el manipulador se degenera con ambos ejes de las articulaciones 4 y 6 alineadas. En este estado solo la suma de θ_4 y θ_6 es significativa. Si $\theta_5 = 0$ somos libres de escoger cualquier valor de θ_4 . El valor actual es frecuentemente asignado.

De la parte derecha de la ecuación (2.57) podemos obtener las ecuaciones para s_5, c_5, s_6 y c_6 por inspección. Cuando están definidos ambos, el seno y el coseno, obtenemos un valor único para el ángulo de articulación. Igualando los elementos 1,3 y 2,3 de la ecuación (2.57) obtenemos un valor para θ_5 ,

$$s_5 = c_4 \left[c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z \right] + s_4 \left[-s_1 a_x + c_1 a_y \right] \quad (2.66)$$

$$c_5 = s_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) + c_2 a_z \quad (2.67)$$

y obtenemos θ_5 ,

$$\theta_5 = \text{atan2} \left(s_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) + c_2 a_z, c_4 \left[c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z \right] + s_4 \left[-s_1 a_x + c_1 a_y \right] \right) \quad (2.68)$$

A pesar de tener ecuaciones para ambos s_6 y c_6 , la ecuación de s_6 está en términos de los elementos de la primera columna, lo cual involucra el uso del vector n de T_6 . Dicho vector usualmente no está disponible dado que presenta información redundante. De todas formas siempre puede ser calculado a partir del producto cruz entre los vectores o y a . Evaluando los elementos de la ecuación (2.29) obtenemos las ecuaciones para s_6 y c_6 en función del vector o ,

$$\begin{bmatrix} f_{15}(n) & f_{15}(o) & 0 & 0 \\ f_{25}(n) & f_{25}(o) & 0 & 0 \\ f_{35}(n) & f_{35}(o) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Donde,

$$f_{15} = c_5 \left\{ c_4 \left[c_2 (c_1 x + s_1 y) - s_2 z \right] + s_4 \left[-s_1 o_x + c_1 o_y \right] \right\} + s_5 \left\{ -s_2 (c_1 o_x + s_1 o_y) - c_2 o_z \right\} \quad (2.70)$$

$$f_{25} = -s_4 \left[c_2 (c_1 o_x + s_1 o_y) - s_2 o_z \right] + c_4 \left[-s_1 o_x + c_1 o_y \right] \quad (2.71)$$

$$f_{35} = s_5 \left\{ c_4 \left[c_2 (c_1 x + s_1 y) - s_2 z \right] + s_4 \left[-s_1 o_x + c_1 o_y \right] \right\} + c_5 \left\{ s_2 (c_1 o_x + s_1 o_y) + c_2 o_z \right\} \quad (2.72)$$

Igualando los elementos 1,2 y 2,2 obtenemos expresiones para s_6 y c_6

$$s_6 = -c_5 \left\{ c_4 \left[c_2 (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) - s_2 \theta_z \right] + s_4 \left[-s_1 \theta_x + c_1 \theta_y \right] \right\} + s_5 \left\{ s_2 (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) - c_2 \theta_z \right\} \quad (2.73)$$

$$c_6 = -s_4 \left[c_2 (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) - s_2 \theta_z \right] + c_4 \left[-s_1 \theta_x + c_1 \theta_y \right] \quad (2.74)$$

Obtenemos entonces una ecuación para θ_6 ,

$$\theta_6 = \text{atan2} \left(\begin{array}{l} -s_4 \left[c_2 (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) - s_2 \theta_z \right] + c_4 \left[-s_1 \theta_x + c_1 \theta_y \right], \\ -c_5 \left\{ c_4 \left[c_2 (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) - s_2 \theta_z \right] + s_4 \left[-s_1 \theta_x + c_1 \theta_y \right] \right\} + s_5 \left\{ s_2 (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) - c_2 \theta_z \right\} \end{array} \right) \quad (2.75)$$

Aún en el caso de que θ_4 sea indefinida porque la configuración del manipulador es degenerativa, una vez se asigne un valor a θ_4 entonces los valores correctos para θ_5 y θ_6 son determinados por estas ecuaciones.

Ejemplo 5 Cinemática Inversa para el Manipulador de Articulaciones Rotacionales

Como en el caso anterior, se procede de acuerdo a la ecuación (2.25) empleando las matrices correspondientes a la configuración del manipulador.

$$\begin{bmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6 & -c_{234}c_5s_6 - s_{234}c_6 & c_{234}s_5 & c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2 \\ s_{234}c_5c_6 + c_{234}s_6 & -s_{234}c_5s_6 + c_{234}c_6 & s_{234}s_5 & s_{234}a_4 + s_{23}a_3 + s_2a_2 \\ -s_5s_6 & s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

donde

$$f_{11} = c_1x + s_1y \quad (2.77)$$

$$f_{12} = z \quad (2.78)$$

$$f_{31} = s_1x + c_1y \quad (2.79)$$

c_{234} representa $\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$ y s_{234} representa $\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$.
Igualando los elementos 3,4 nos da una ecuación para θ_1

$$s_1 p_z - c_1 p_y = 0 \quad (2.80)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (2.81)$$

$$\theta_1 = \theta_1 + 180^\circ \quad (2.82)$$

Nótese también que se tiene una ecuación para c_5 a partir de los elementos 3,3

$$c_5 = s_1 a_x + c_1 a_y \quad (2.83)$$

En el caso de este manipulador, las 3 articulaciones siguientes son paralelas entre si por lo cual no se obtienen resultados nuevos al premultiplicar por la matrices inversas de A hasta que el 4 eje sea restringido (2.28).

$$\begin{bmatrix} f_{14}(n) & f_{14}(o) & f_{14}(a) & f_{14}(p) - c_{34}a_2 - c_4a_3 - a_4 \\ f_{24}(n) & f_{24}(o) & f_{24}(a) & 0 \\ f_{34}(n) & f_{34}(o) & f_{34}(a) & f_{34}(p) + s_{34}a_2 + s_4a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

donde

$$f_{14} = c_{234}(c_1a_x + s_1a_y) + s_{234}a_z \quad (2.85)$$

$$f_{24} = -(s_1a_x - c_1a_y) \quad (2.86)$$

$$f_{34} = -s_{234}(c_1a_x + s_1a_y) + c_{234}a_z \quad (2.87)$$

Igualando los elementos 3,3 nos da la ecuación para θ_{234}

$$-s_{234}(c_1a_x + s_1a_y) + c_{234}a_z = 0 \quad (2.88)$$

$$\theta_{234} = \text{atan2}(c_1a_x + s_1a_y, a_z) \quad (2.89)$$

$$\theta_{234} = \theta_{234} + 180^\circ \quad (2.90)$$

En este manipulador, θ_3 controla el alcance y podemos esperar una relación coseno con el alcance al cuadrado. Esto se puede obtener solucionando simultáneamente las ecuaciones obtenidas a partir de los elementos 1,4 y 2,4 en la ecuación (2.76)

$$c_1\dot{p}_x + s_1\dot{p}_y = c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2 \quad (2.91)$$

$$\dot{p}_z = s_{234}a_4 + s_{23}a_3 + s_2a_2 \quad (2.92)$$

Dejando

$$\dot{p}_x' = c_1\dot{p}_x + s_1\dot{p}_y - c_{234}a_4 \quad (2.93)$$

$$\dot{p}_y' = \dot{p}_z - s_{234}a_4 \quad (2.94)$$

Substituyendo las ecuaciones (2.93) y (2.94) en (2.91) y (2.92) respectivamente, obtenemos

$$\dot{p}_x' = c_{23}a_3 + c_2a_2 \quad (2.95)$$

$$\dot{p}_y' = s_{23}a_3 + s_2a_2 \quad (2.96)$$

Cuadrando y sumando ambas ecuaciones

$$c_3 = \frac{\dot{p}_x'^2 + \dot{p}_y'^2 - a_3^2 - a_2^2}{2a_2a_3} \quad (2.97)$$

Mientras se podría obtener θ_3 del arco coseno, se obtendrá aquí el valor para s_3 y se empleará la función tangente

$$s_3 = \pm\sqrt{1-c_3^2} \quad (2.98)$$

Donde ambas soluciones (+/-) corresponden a una configuración de hombro arriba y hombro abajo.

$\theta_3 = \text{atan2}(c_3, s_3) \quad (2.99)$
--

Las expresiones para s_2 y c_2 se obtiene resolviendo las ecuaciones (2.95) y (2.96) simultáneamente

$$s_2 = \frac{(c_3a_3 + a_2)\dot{p}_y' - s_3a_3\dot{p}_x'}{(c_3a_3 + a_2)^2 + s_3^2a_3^2} \quad (2.100)$$

$$c_2 = \frac{(c_3a_3 + a_2)\dot{p}_x' + s_3a_3\dot{p}_y'}{(c_3a_3 + a_2)^2 + s_3^2a_3^2} \quad (2.101)$$

Como los denominadores son iguales y positivos, se obtiene

$$\theta_2 = \text{atan2} \left[(c_3 a_3 + a_2) \dot{p}_x + s_3 a_3 \dot{p}_y, (c_3 a_3 + a_2) \dot{p}_y - s_3 a_3 \dot{p}_x \right] \quad (2.102)$$

θ_4 está dado por

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_3 - \theta_2 \quad (2.103)$$

Las ecuaciones para θ_5 se obtienen igualando los elementos 1,3 y 2,3 de la ecuación (2.84)

$$s_5 = c_{234} (c_1 a_x + s_1 a_y) + s_{234} a_z \quad (2.104)$$

$$c_5 = s_1 a_x + c_1 a_y \quad (2.105)$$

Entonces

$$\theta_5 = \text{atan2} \left(s_1 a_x + c_1 a_y, c_{234} (c_1 a_x + s_1 a_y) + s_{234} a_z \right) \quad (2.106)$$

Premultiplicando por A_5^{-1} se obtiene

$$\begin{bmatrix} f_{15}(n) & f_{15}(\theta) & 0 & 0 \\ f_{25}(n) & f_{25}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

donde

$$f_{15} = c_5 \left[c_{234} (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) + s_{234} \theta_z \right] - s_5 (s_1 \theta_x - c_1 \theta_y) \quad (2.108)$$

$$f_{25} = -s_{234} (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) + c_{234} \theta_z \quad (2.109)$$

y por inspección

$$s_6 = -c_5 \left[c_{234} (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) + s_{234} \theta_z \right] + s_5 (s_1 \theta_x - c_1 \theta_y) \quad (2.110)$$

$$c_6 = -s_{234} (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) + c_{234} \theta_z \quad (2.111)$$

con

$$\theta_6 = \text{atan2} \left(\begin{array}{l} -s_{234} (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) + c_{234} \theta_z, \\ -c_5 \left[c_{234} (c_1 \theta_x + s_1 \theta_y) + s_{234} \theta_z \right] + s_5 (s_1 \theta_x - c_1 \theta_y) \end{array} \right) \quad (2.112)$$

Nuevamente, se procede de acuerdo a la ecuación $(A_1^0)^{-1}T_5^0 = T_5^4$ empleando las matrices correspondientes a la configuración del manipulador.

$$\begin{bmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) - 300 \\ f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{234}c_5 & -c_{234}s_5 & s_{234} & 147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2 \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & -147 \cdot c_{234} + 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

donde

$$f_{11} = c_1x + s_1y \quad (2.114)$$

$$f_{21} = z \quad (2.115)$$

$$f_{31} = s_1x - c_1y \quad (2.116)$$

c_{234} representa $\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$ y s_{234} representa $\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$. Igualando los elementos 3,4 nos da una ecuación para θ_1

$$s_1p_z - c_1p_y = 0 \quad (2.117)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_z, p_y) \quad (2.118)$$

$$\theta_1 = \theta_1 + 180^\circ \quad (2.119)$$

Nótese también que se tiene una ecuación para s_5 y c_5 a partir de los elementos 3,1 y 3,2, respectivamente,

$$s_5 = s_1n_x - c_1n_y \quad (2.120)$$

$$c_5 = s_1d_x - c_1d_y \quad (2.121)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_1d_x - c_1d_y, s_1n_x - c_1n_y) \quad (2.122)$$

De los elementos 1,3 y 2,3 se tiene,

$$c_1 a_x - s_1 a_y = s_{234} \quad (2.123)$$

$$a_z = -c_{234} \quad (2.124)$$

Dado que el lado izquierdo de las ecuaciones anteriores está completamente definido se define el ángulo θ_{234} ,

$$\theta_{234} = \text{atan2}(-a_z, c_1 a_x + s_1 a_y) \quad (2.125)$$

$$\theta_{234} = \theta_{234} + 180^\circ \quad (2.126)$$

De los elementos 1,4 y 2,4 se extrae el valor del ángulo θ_3 de la siguiente manera,

$$c_1 p_x + s_1 p_y = 147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2 \quad (2.127)$$

$$-300 + p_z = -147 \cdot c_{234} + 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2 \quad (2.128)$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores,

$$p_x^1 = c_1 p_x + s_1 p_y - 147 \cdot s_{234} \quad (2.129)$$

$$p_y^1 = p_z - 147 \cdot c_{234} - 300 \quad (2.130)$$

Resulta en,

$$p_x^1 = 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2 \quad (2.131)$$

$$p_y^1 = 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2 \quad (2.132)$$

Elevando al cuadrado y sumando las dos ecuaciones anteriores,

$$(p_x^1)^2 + (p_y^1)^2 = (160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2)^2 + (160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2)^2 \quad (2.133)$$

$$p_x^{1^2} + p_y^{1^2} = 80000 \cdot c_3 + 88100 \quad (2.134)$$

$$c_3 = \frac{p_x^{1^2} + p_y^{1^2} - 88100}{80000} \quad (2.135)$$

$$s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2} \quad (2.136)$$

z_0

$$\theta_3 = \text{atan2} \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - 88100}{80000}, \pm \sqrt{1 - c_3^2} \right) \quad (2.137)$$

El signo positivo o negativo corresponde a la configuración de codo arriba o abajo, respectivamente. Al igual que en el manipulador de articulaciones rotacionales del ejemplo anterior, en este manipulador, θ_3 controla el alcance y podemos esperar una relación coseno con el alcance al cuadrado. El coseno y el seno de θ_2 se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2.131) y (2.132),

$$c_2 = \frac{(160 \cdot c_3 + 250) p_x^1 + 160 \cdot s_3 p_y^1}{88100 + 80000 \cdot c_3} \quad (2.138)$$

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (2.139)$$

Por lo tanto,

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(\frac{(160 \cdot c_3 + 250) p_x^1 + 160 \cdot s_3 p_y^1}{88100 + 80000 \cdot c_3}, \pm \sqrt{1 - c_2^2} \right) \quad (2.140)$$

Finalmente, θ_4 se obtiene a partir de,

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_3 - \theta_2 \quad (2.141)$$

Método Geométrico Cerrado

El método geométrico explota la configuración espacial de un manipulador particular para resolver por medio de relaciones geométricas planas los valores de cada ángulo de articulación. A continuación se presenta una solución geométrica para el robot Mitsubishi RV-M1.

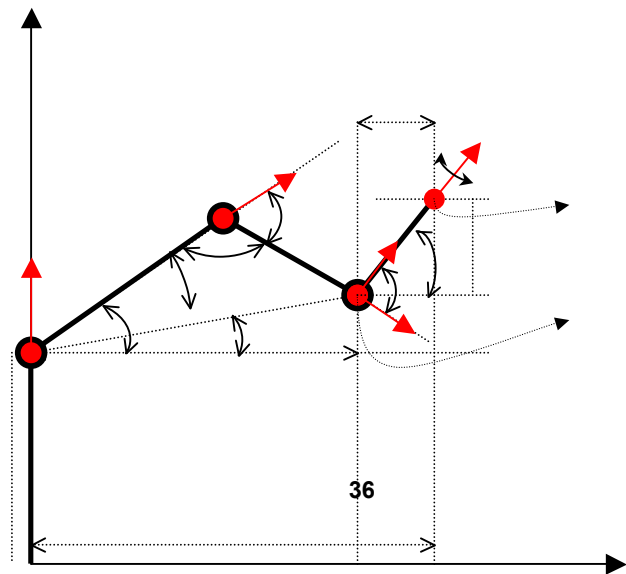


Figura 9 Esquemático del robot RV-M1 sobre el plano XZ

La solución para la articulación de cintura está dada por

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (2.142)$$

Es posible, dada la configuración cinemática del Mitsubishi RV-M1, simplificar el conjunto de parámetros requeridos para solucionar las variables siguientes (eliminando las coordenadas sobre el eje y) llevando la geometría a coincidencia con un solo plano, tal y como se muestra en la Figura 9 (plano xz). Para ello es necesario aplicar una rotación de $-\theta_1$ alrededor del eje z_0 sobre la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación del efector final. El resultado se utilizaría entonces para hallar las variables de ángulo siguientes.

$$T_5^0 = T_{z_0, -\theta_1} T_5^0 \quad (2.143)$$

Sin embargo, tomaremos la vía convencional.

En primera instancia determinamos el punto coincidente con el origen de la articulación de muñeca.

$$p_m = p - d_5 a \quad (2.144)$$

Donde, a corresponde al vector unitario de aproximación del efector final extraído de T_5^0 , d_5 al largo del efector final y p al subvector de posición extraído de T_5^0 .

La distancia entre el eje de articulación del hombro y el eje de la muñeca (p_m) está dada por,

$$R = \sqrt{p_{m_x}^2 + p_{m_y}^2 + (p_{m_z} - d_1)^2} \quad (2.145)$$

Encontrando el ángulo parcial asociado con el hombro,

$$\theta_{2a} = \text{atan2}\left(p_{m_z}, \sqrt{p_{m_x}^2 + p_{m_y}^2}\right) \quad (2.146)$$

y aplicando la ley de cosenos para resolver por $0 \leq \theta_{2b} \leq \pi$ de tal manera que se preserve la geometría

$$\theta_{2b} = \left| \text{acos}\left(\frac{R^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2 R}\right) \right| \quad (2.147)$$

Entonces,

$$\theta_2 = \begin{cases} \theta_{2b} - \theta_{2a} & \text{si } R \leq (a_2 + a_3) \\ \theta_{2a} - \theta_{2b} & \text{si } R > (a_2 + a_3) \end{cases} \quad (2.148)$$

Nuevamente empleando la ley de cosenos para hallar la variable de articulación número tres (θ_3)

$$\theta_3 = -\left| \arccos \left(\frac{R^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \right) \right| \quad (2.149)$$

El signo de θ_3 es siempre negativo, debido a la limitación en movimiento del codo en este manipulador.

Estos tres primeros ángulos de articulación representan la posición de la muñeca en el espacio euclídeo tridimensional. Empleando estos resultados parciales para encontrar la posición y orientación de la muñeca podemos deducir rápidamente los ángulos restantes que otorgan la orientación de la misma.

$$T_3^0 = A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) A_3^2(\theta_3) \quad (2.150)$$

El vector de aproximación de la mano, a , se extrae directamente de T_5^0 y según la morfología del manipulador se orienta en el sentido del elemento d_5 y es referenciado con respecto del sistema de base del robot. Examinando la geometría del efector final, de manera más precisa la orientación de los vectores de la mano extraídos de T_5^0 , en relación con T_3^0 encontramos que el movimiento de “pitch” está siempre sobre el plano de θ_1 .

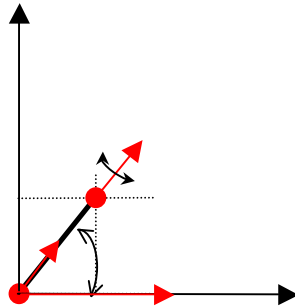


Figura 10 Esquemático de Solución para θ_{4-5} del Robot Mitsubishi RV-m1

Consecuentemente,

$$\sin(\theta_4) = a' \cdot w_3 \quad (2.151)$$

$$\cos(\theta_4) = a' \cdot u_3 \quad (2.152)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(a^T \cdot u_3, a^T \cdot w_3) \quad (2.153)$$

De igual manera para θ_5 , encontramos T_4^0 , y evaluamos las proyecciones de T_5^0 sobre el sistema de coordenadas resultante,

$$\text{sen}(\theta_5) = n^T \cdot v_4 \quad (2.154)$$

$$\text{cos}(\theta_5) = o^T \cdot v_4 \quad (2.155)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(n^T \cdot v_4, o^T \cdot v_4) \quad (2.156)$$

Es de notar que para el caso del ángulo de “roll” se utiliza el vector de deslizamiento/orientación de la uña.

Relaciones Diferenciales

Indispensables para transformar cambios diferenciales en un sistema de coordenadas a otro sistema de coordenadas diferente – por ejemplo, en el cálculo de cambios diferenciales, observados por una cámara, en posición y orientación del efector final de un manipulador. Otra posibilidad es la de encontrar los movimientos articulares a partir de un cambio diferencial en T_6 . De igual forma, en la sección de Dinámica se discute la importancia de las relaciones diferenciales en las transformaciones de fuerza.

Traslaciones y Rotaciones diferenciales

Dada una transformación cuyos elementos son función de una variable, la transformación diferencial con respecto a esa variable es la transformación cuyos elementos son las derivadas de los elementos de transformación originales. Excluyendo las transformaciones de escalado y perspectiva, es posible expresar transformaciones homogéneas de translación y rotación diferenciales en términos del sistema de coordenadas dado o el de referencia. Dado un sistema de coordenadas T , se expresa un cambio diferencial en translación y rotación de la siguiente manera,

$$T + dT = t_{dx,dy,dz} \cdot r_{k,\partial\psi} \cdot T \quad (2.157)$$

Ángulos/Desplazamientos muy pequeños ¡!

$$r_{k,\partial\psi} \equiv r_{z,\partial\theta} \cdot r_{y,\partial\phi} \cdot r_{x,\partial\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \partial\phi_y \cdot \partial\alpha_x - \partial\theta_z & \partial\phi_y + \partial\theta_z \cdot \partial\alpha_x & 0 \\ \partial\theta_z & 1 + \partial\theta_z \cdot \partial\phi_y \cdot \partial\alpha_x & \partial\theta_z \cdot \partial\phi_y - \partial\alpha_x & 0 \\ -\partial\phi_y & \partial\alpha_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

Despreciando los términos de segundo orden,

$$r_{k,\partial\psi} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\partial\theta_z & \partial\phi_y & 0 \\ \partial\theta_z & 1 & -\partial\alpha_x & 0 \\ -\partial\phi_y & \partial\alpha_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

$$T + dT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\partial_z & \partial_y & 0 \\ \partial_z & 1 & -\partial_x & 0 \\ -\partial_y & \partial_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T \quad (2.160)$$

$$d\Gamma = \Delta T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\partial_z & \partial_y & 0 \\ \partial_z & 1 & -\partial_x & 0 \\ -\partial_y & \partial_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - I_{4 \times 4} \end{bmatrix} T \quad (2.161)$$

$$\Delta \equiv \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\partial_z & \partial_y & 0 \\ \partial_z & 1 & -\partial_x & 0 \\ -\partial_y & \partial_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - I_{4 \times 4} \\ \Delta \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y & d_x \\ \partial_z & 0 & -\partial_x & d_y \\ -\partial_y & \partial_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

reemplazando (2.162) en (2.161)

$$d\Gamma = \Delta T \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y & d_x \\ \partial_z & 0 & -\partial_x & d_y \\ -\partial_y & \partial_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \quad (2.163)$$

donde $\partial = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$ es la rotación diferencial alrededor de los ejes principales del sistema de coordenadas de la base y $d = (d_x, d_y, d_z)^T$ es la traslación diferencial a lo largo de los ejes principales del mismo sistema. k corresponde al vector sobre el cual se rota un ángulo compuesto ψ , equivalente a la rotación diferencial compuesta sobre los ejes principales de acuerdo con la ecuación (2.158) y también está dado en términos del sistema de coordenadas de la base. Para representar las transformaciones en términos del sistema de coordenadas en movimiento, m , se premultiplica por Δ y los elementos de traslación y rotación se miden con respecto al sistema de coordenadas T . Esto se puede expresar de la siguiente manera,

$$d\Gamma = T \left({}^m \Delta \right) \quad (2.164)$$

donde el superíndice m en ${}^m \Delta$ indica el sistema de coordenadas sobre el cual se efectúa la transformación.

$${}^m \Delta = T^{-1} d\Gamma = T^{-1} \Delta T \quad (2.165)$$

A partir de (2.4) y (2.7) e identificando la submatriz(fila _{1,3},columna _{1,3}) - de rotación diferencial - de (2.162) como la matriz antisimétrica de ∂ se obtiene (skew simétrica),

$${}^m\Delta = T^{-1}\Delta T = \begin{bmatrix} n \cdot (\partial \times n) & n \cdot (\partial \times o) & n \cdot (\partial \times a) & n \cdot (\partial \times p) + d \\ o \cdot (\partial \times n) & o \cdot (\partial \times o) & o \cdot (\partial \times a) & o \cdot (\partial \times p) + d \\ a \cdot (\partial \times n) & a \cdot (\partial \times o) & a \cdot (\partial \times a) & a \cdot (\partial \times p) + d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.166)$$

Simplificando,

$${}^m\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\partial \cdot (n \times o) & \partial \cdot (a \times n) & \partial \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ \partial \cdot (n \times o) & 0 & -\partial \cdot (o \times a) & \partial \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ -\partial \cdot (a \times n) & \partial \cdot (o \times a) & 0 & \partial \cdot (p \times a) + d \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

Dadas las condiciones de ortogonalidad entre los ejes de coordenadas n, o y a

$$\begin{aligned} n \cdot (o \times a) &= -o \cdot (n \times a) = o \cdot (a \times n) \\ n \cdot (n \times a) &= 0 \end{aligned} \quad (2.168)$$

la ecuación (2.167) se transforma en

$${}^m\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\partial \cdot a & \partial \cdot o & \partial \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ \partial \cdot a & 0 & -\partial \cdot n & \partial \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ -\partial \cdot o & \partial \cdot n & 0 & \partial \cdot (p \times a) + d \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

Por definición ${}^m\Delta$ es

$${}^m\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^m\partial_{\tilde{z}} & {}^m\partial_{\tilde{y}} & {}^m d_{\tilde{x}} \\ {}^m\partial_{\tilde{z}} & 0 & -{}^m\partial_{\tilde{x}} & {}^m d_{\tilde{y}} \\ -{}^m\partial_{\tilde{y}} & {}^m\partial_{\tilde{x}} & 0 & {}^m d_{\tilde{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

Igualando (2.170) y (2.169) tenemos

$$\begin{aligned} {}^m d_{\tilde{x}} &= \partial \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ {}^m d_{\tilde{y}} &= \partial \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ {}^m d_{\tilde{z}} &= \partial \cdot (p \times a) + d \cdot a \end{aligned} \quad (2.171)$$

$$\begin{aligned}
 {}^m\partial_x &= \partial \cdot n \\
 {}^m\partial_y &= \partial \cdot o \\
 {}^m\partial_z &= \partial \cdot a
 \end{aligned} \tag{2.172}$$

La ecuación anterior puede expresarse en forma 6-dimensional

$$\begin{bmatrix} {}^m d_x \\ {}^m d_y \\ {}^m d_z \\ {}^m \partial_x \\ {}^m \partial_y \\ {}^m \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (p \times n)_x & (p \times n)_y & (p \times n)_z \\ o_x & o_y & o_z & (p \times o)_x & (p \times o)_y & (p \times o)_z \\ a_x & a_y & a_z & (p \times a)_x & (p \times a)_y & (p \times a)_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \tag{2.173}$$

Computacionalmente,

$$\begin{aligned}
 {}^m d_x &= n \cdot ((\partial \times p) + d) \\
 {}^m d_y &= o \cdot ((\partial \times p) + d) \\
 {}^m d_z &= a \cdot ((\partial \times p) + d)
 \end{aligned} \tag{2.174}$$

$$\begin{aligned}
 {}^m \partial_x &= n \cdot \partial \\
 {}^m \partial_y &= o \cdot \partial \\
 {}^m \partial_z &= a \cdot \partial
 \end{aligned} \tag{2.175}$$

El Jacobiano de un Manipulador

Las transformaciones diferenciales estudiadas anteriormente expresan la posición y orientación del efector final del manipulador en términos del producto de transformaciones A . Nuevamente, suponiendo un manipulador de seis grados de libertad,

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \tag{2.176}$$

Se puede escribir una ecuación para representar un cambio diferencial dT_6 en términos de un cambio diferencial en coordenadas de T_6 , ${}^{T_6}\Delta$, y en términos del cambio diferencial de cualquier coordenada i como

$$dT_6 = T_6 {}^{T_6}\Delta_i dq_i = A_1 A_2 K_{A_{i-1}} {}^{i-1}\Delta_i A_i A_{i+1} K_{A_6} dq_i \tag{2.177}$$

Entonces

$$\frac{\partial T_6}{\partial q_i} = T_6 {}^{T_6}\Delta_i \tag{2.178}$$

donde, a partir de (2.165),

$${}^{T_6}\Delta = (A_i A_{i+1} K A_6)^{-1} {}^{i-1}\Delta_i (A_i A_{i+1} K A_6) \quad (2.179)$$

La transformada diferencial de coordenadas es entonces,

$$d\Gamma = {}^{i-1}\Delta_i (A_i A_{i+1} K A_6) = {}^{i-1}\Delta T_6 \quad (2.180)$$

Para una articulación rotacional, $d_i = 0$, por lo tanto (2.174)-(2.175) se reducen a

$$\begin{aligned} {}^{T_6}d_{i_x} &= n \cdot (\partial \times p) \\ {}^{T_6}d_{i_y} &= o \cdot (\partial \times p) \\ {}^{T_6}d_{i_z} &= a \cdot (\partial \times p) \end{aligned} \quad (2.181)$$

$$\begin{aligned} {}^{T_6}\partial_{i_x} &= n \cdot \partial \\ {}^{T_6}\partial_{i_y} &= o \cdot \partial \\ {}^{T_6}\partial_{i_z} &= a \cdot \partial \end{aligned} \quad (2.182)$$

Sin embargo, $\partial_i = 0i + 0j + 1k$ (el movimiento articular se ejecuta sobre o a lo largo del eje z), por lo tanto las ecuaciones anteriores pueden ser simplificadas aún más

$${}^{T_6}d_{i_x} = -n_x p_y + n_y p_x \quad (2.183)$$

$${}^{T_6}d_{i_y} = -o_x p_y + o_y p_x \quad (2.184)$$

$${}^{T_6}d_{i_z} = -a_x p_y + a_y p_x \quad (2.185)$$

$${}^{T_6}\partial_{i_x} = n_z \quad (2.186)$$

$${}^{T_6}\partial_{i_y} = o_z \quad (2.187)$$

$${}^{T_6}\partial_{i_z} = a_z \quad (2.188)$$

Si la articulación es prismática, $\partial = 0, d = 0i + 0j + 1k$, por lo tanto se reducen a

$${}^{T_6}d_i = n_z i + o_z j + a_z k \quad (2.189)$$

$${}^{T_6}\partial_i = 0i + 0j + 0k \quad (2.190)$$

La relación diferencial, posición y orientación, de T_6 en función de todas las 6 coordenadas de articulación se escribe como una matriz 6-dimensional consistente de elementos vectoriales correspondientes a los vectores diferenciales de rotación T_i y traslación y se conoce como el Jacobiano. Cada columna del Jacobiano consiste del vector 6-dimensional con los correspondientes 3 elementos de traslación diferencial y 3 elementos de rotación diferencial para cada coordenada de articulación.

$$\begin{bmatrix} T_6 d_x \\ T_6 d_y \\ T_6 d_z \\ T_6 \partial_x \\ T_6 \partial_y \\ T_6 \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_6 d_{1x} & T_6 d_{2x} & T_6 d_{3x} & T_6 d_{4x} & T_6 d_{5x} & T_6 d_{6x} \\ T_6 d_{1y} & T_6 d_{2y} & T_6 d_{3y} & T_6 d_{4y} & T_6 d_{5y} & T_6 d_{6y} \\ T_6 d_{1z} & T_6 d_{2z} & T_6 d_{3z} & T_6 d_{4z} & T_6 d_{5z} & T_6 d_{6z} \\ T_6 \partial_{1x} & T_6 \partial_{2x} & T_6 \partial_{3x} & T_6 \partial_{4x} & T_6 \partial_{5x} & T_6 \partial_{6x} \\ T_6 \partial_{1y} & T_6 \partial_{2y} & T_6 \partial_{3y} & T_6 \partial_{4y} & T_6 \partial_{5y} & T_6 \partial_{6y} \\ T_6 \partial_{1z} & T_6 \partial_{2z} & T_6 \partial_{3z} & T_6 \partial_{4z} & T_6 \partial_{5z} & T_6 \partial_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix} \quad (2.191)$$

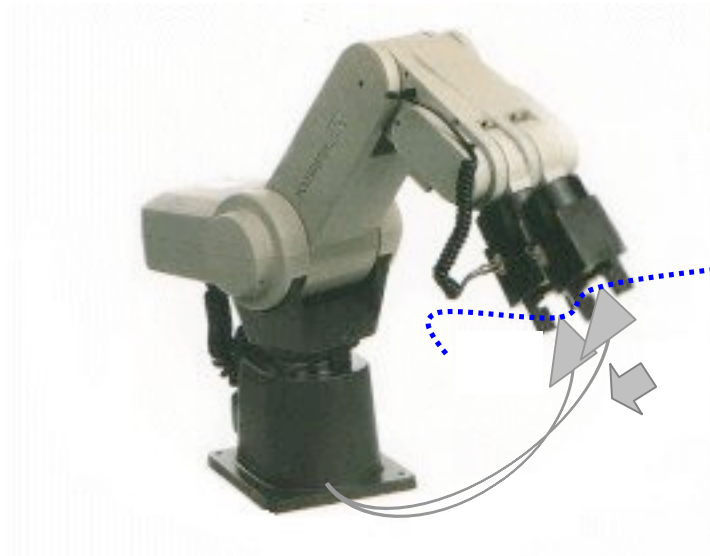


Figura 11 Movimiento Diferencial (expresando el Jacobiano)

$$\begin{aligned} V &= J\dot{Q} \\ dT|_{\epsilon} \circ_{6 \times 1} &= JdQ \\ J^{-1}[T_{i+1} - T_i]|_{\epsilon} \circ_{6 \times 1} &= [Q_{i+1} - Q_i] \\ J^{-1}[T_{i+1} - T_i]|_{\epsilon} \circ_{6 \times 1} - Q_i &= Q_{i+1} \end{aligned} \quad (2.192)$$

Ejemplo 7 El Jacobiano para el Manipulador Stanford

A partir de las transformaciones \mathcal{A} definidas para el manipulador Stanford en las ecuaciones se calculan las columnas del Jacobiano.

Necesitamos las transformaciones diferenciales de coordenadas correspondientes a los 6 cambios diferenciales $d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3, d\theta_4, d\theta_5, d\theta_6$; estos son ${}^0T_6, {}^1T_6, {}^2T_6, {}^3T_6, {}^4T_6, {}^5T_6$, respectivamente.

El producto de las transformaciones \mathcal{A} para el manipulador, comenzando desde la articulación 6 y regresando a la base, son

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.193)$$

$${}^4T_6 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

$${}^3T_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & 0 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

$${}^2T_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & 0 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6 & -c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6 & c_2c_4s_5 + s_2c_5 & s_2d_3 \\ s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_2s_5c_6 & -s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_2s_5s_6 & s_2c_4s_5 - c_2c_5 & -c_2d_3 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

Por último 0T_6 está dado por la ecuación (2.16).

La primera columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_6 / \partial \theta_1$; la transformación de coordenadas diferencial es T_6 , dada por las ecuaciones (2.7) y (2.16). Utilizando las ecuaciones (2.183) y (2.186) se calculan los vectores de traslación y rotación diferenciales cuyos elementos conforman la primera columna del Jacobiano.

$$\begin{aligned} {}^{T_6}d_{1_x} = & -\{c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)\} \cdot \{s_1s_2d_3 + c_1d_2\} \\ & + \{s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)\} \cdot \{s_1s_2d_3 - s_1d_2\} \end{aligned} \quad (2.198)$$

Revisar construcción primera fila jacobiano

$$\begin{aligned} {}^{T_6}d_{1_y} = & -\{c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + s_1(s_4c_5s_6 - c_4c_6)\} \cdot \{s_1s_2d_3 + c_1d_2\} \\ & + \{s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6)\} \cdot \{c_1s_2d_3 - s_1d_2\} \end{aligned} \quad (2.199)$$

$$\begin{aligned} {}^{T_6}d_{1_z} = & -\{c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5\} \{s_1s_2d_3 + c_1d_2\} \\ & + \{s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5\} \{c_1s_2d_3 - s_1d_2\} \end{aligned} \quad (2.200)$$

$${}^{T_6}\partial_{1_x} = -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \quad (2.201)$$

$${}^{T_6}\partial_{1_y} = s_2(c_4c_5s_6 - s_4c_6) - c_2s_5s_6 \quad (2.202)$$

$${}^{T_6}\partial_{1_z} = -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \quad (2.203)$$

Simplificando, la primera columna del Jacobiano para el manipulador Stanford es

$$\frac{\partial T_6}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -d_2[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + s_2d_3(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ -d_2[-c_2(c_4c_5s_6 - s_4c_6) - s_2s_5s_6] + s_2d_3(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ -d_2(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + s_2d_3s_4s_5 \\ -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \\ s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \\ -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

La segunda columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_6 / \partial \theta_2$; la transformada diferencial de coordenadas es 1T_6 . De nuevo esta articulación es rotacional y por lo tanto se aplican las mismas ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned} {}^{T_6}d_{2_x} = & -\{c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6\} \{-c_2d_3\} \\ & + \{s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_2s_5c_6\} \{s_2d_3\} \end{aligned} \quad (2.205)$$

$$\begin{aligned} {}^{T_6}d_{2_y} = & -\{-c_2(c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_2s_5s_6\} \{-c_2d_3\} \\ & + \{-s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_2s_5s_6\} \{s_2d_3\} \end{aligned} \quad (2.206)$$

$${}^{T_6}d_{2_z} = -\{c_2c_4s_5 + s_2c_5\}\{-c_2d_3\} + \{s_2c_4s_5 - c_2c_5\}\{s_2d_3\} \quad (2.207)$$

$${}^{T_6}\partial_{2_x} = s_4c_5c_6 + c_4s_6 \quad (2.208)$$

$${}^{T_6}\partial_{2_y} = -s_4c_5s_6 + c_4c_6 \quad (2.209)$$

$${}^{T_6}\partial_{2_z} = s_4s_5 \quad (2.210)$$

Simplificando

$$\frac{\partial T_6}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} d_3(c_4c_5c_6 - s_4s_6) \\ -d_3(c_4c_5c_6 + s_4s_6) \\ d_3c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 \\ -s_4c_5s_6 + c_4c_6 \\ s_4s_5 \end{bmatrix} \quad (2.211)$$

La tercera columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_6 / \partial \theta_3$; la transformada diferencial de coordenadas es 2T_6 . Dado que esta articulación es prismática en el manipulador Stanford se emplean las ecuaciones (2.189)-(2.190) para obtener los elementos de la tercera columna del Jacobiano, que podemos escribir directamente como

$$\frac{\partial T_6}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} -s_5c_6 \\ s_5s_6 \\ c_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.212)$$

Las ecuaciones se hacen más simples a medida que nos acercamos al efector final. La siguiente columna corresponde a la articulación rotacional, que se define una vez más con las ecuaciones empleadas para las articulaciones 1 y 2. En este caso el vector p es cero por lo tanto,

$$\frac{\partial T_6}{\partial \theta_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s_5c_6 \\ s_5s_6 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad (2.213)$$

La transformada diferencial de coordenadas para la articulación 5 esta dada por la ecuación 4T_6 y resulta en

$$\frac{\partial T_6}{\partial \theta_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_6 \\ c_6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.214)$$

Finalmente, $\partial T_6 / \partial \theta_6$ se define por la transformada diferencial de coordenadas 5T_6 y resulta en

$$\frac{\partial T_6}{\partial \theta_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.215)$$

Ejemplo 8 El Jacobiano para el Manipulador Mitsubishi RV-M1

Siendo un manipulador de 5 grados de libertad se calculan T_5 y dT_5 de acuerdo a,

$$T_5 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \quad (2.216)$$

$$dT_5 = T_5 {}^{T_5} \Delta_i dq_i = A_1 A_2 K A_{i-1} {}^{i-1} \Delta_i A_i A_{i+1} K A_5 dq_i \quad (2.217)$$

Entonces

$$\frac{\partial T_5}{\partial q_i} = T_5 {}^{T_5} \Delta_i \quad (2.218)$$

donde, a partir de (2.165),

$${}^{T_5} \Delta_i = (A_i A_{i+1} K A_5)^{-1} {}^{i-1} \Delta_i (A_i A_{i+1} K A_5) \quad (2.219)$$

La transformada diferencial de coordenadas es entonces,

$$d\Gamma = {}^{i-1} \Delta_i (A_i A_{i+1} K A_5) = {}^{i-1} \Delta T_5 \quad (2.220)$$

Los productos de las transformaciones A del manipulador, comenzando desde la articulación 5 y regresando hasta la base, son

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.221)$$

$$T_5^3 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 & -c_4 s_5 & s_4 & 147 \cdot s_4 \\ s_4 c_5 & -s_4 s_5 & -c_4 & -147 \cdot c_4 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.222)$$

$$T_5^2 = \begin{bmatrix} c_{34} c_5 & -c_{34} s_5 & s_{34} & 147 \cdot s_{34} + 160 \cdot c_3 \\ s_{34} c_5 & -s_{34} s_5 & -c_{34} & -147 \cdot c_{34} + 160 \cdot s_3 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.223)$$

$$T_5^1 = \begin{bmatrix} c_{234} c_5 & -c_{234} s_5 & s_{234} & 147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2 \\ s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & -c_{234} & -147 \cdot c_{234} + 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.224)$$

$$T_5^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 & -c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 s_{234} & c_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \\ s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 & -s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 s_{234} & s_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \\ s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & -c_{234} & 300 - 147 \cdot c_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La primera columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_5 / \partial \theta_1$, donde T_5 está dada por (2.225);

$$\begin{aligned} T_5 d_{1_x} = & -(c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5) \cdot s_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \\ & + (s_1 c_{234} c_5 - c_1 c_5) \cdot c_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \end{aligned} \quad (2.226)$$

$$\begin{aligned} T_5 d_{1_y} = & (c_1 c_{234} s_5 - s_1 c_5) \cdot s_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \\ & - (s_1 c_{234} s_5 + c_1 c_5) \cdot c_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \end{aligned} \quad (2.227)$$

$$\begin{aligned} T_5 d_{1_z} = & -c_1 s_{234} s_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \\ & + s_1 s_{234} c_1 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \end{aligned} \quad (2.228)$$

$$T_5 \partial_{1_x} = s_{234} c_5 \quad (2.229)$$

$$T_5 \partial_{1_y} = -s_{234} s_5 \quad (2.230)$$

$${}^{T_5}\partial_{1_z} = -c_{234} \quad (2.231)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores, el operador 6 dimensional queda así

$$\frac{\partial T_5}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -(s_1^2 s_5 + c_1^2 c_5)(160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2 + 147 \cdot s_{234}) \\ -c_5(250 \cdot c_2 + 147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23}) \\ 0 \\ s_{234} c_5 \\ -s_{234} s_5 \\ -c_{234} \end{bmatrix} \quad (2.232)$$

La segunda columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_5 / \partial \theta_2$, donde T_5 está dada por (2.224);

$${}^{T_5}d_{2_x} = -c_{234} c_5 (-147 \cdot c_{234} + 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2) + s_{234} c_5 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \quad (2.233)$$

$${}^{T_5}d_{2_y} = c_{234} s_5 (-147 \cdot c_{234} + 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2) - s_{234} s_5 (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \quad (2.234)$$

$${}^{T_5}d_{2_z} = -s_{234} (-147 \cdot c_{234} + 160 \cdot s_{23} + 250 \cdot s_2) - c_{234} (147 \cdot s_{234} + 160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) \quad (2.235)$$

$${}^{T_5}\partial_{2_x} = s_5 \quad (2.236)$$

$${}^{T_5}\partial_{2_y} = c_5 \quad (2.237)$$

$${}^{T_5}\partial_{2_z} = 0 \quad (2.238)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores, el operador 6 dimensional queda así

$$\frac{\partial T_5}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} c_5 [(160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) s_{234} + 147 - (250 \cdot s_2 + 160 \cdot s_{23}) c_{234}] \\ s_5 [(250 \cdot s_2 + 160 \cdot s_{23}) c_{234} - 147 - (160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) s_{234}] \\ -(250 \cdot s_2 + 160 \cdot s_{23}) s_{234} - (160 \cdot c_{23} + 250 \cdot c_2) c_{234} \\ s_5 \\ c_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.239)$$

La tercera columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_5 / \partial \theta_3$, donde T_5 está dada por (2.223);

$$\begin{aligned} {}^{T_5}d_{3_x} &= -c_{34}c_5(-147 \cdot c_{34} + 160 \cdot s_3) \\ &\quad + s_{34}c_5(147 \cdot s_{34} + 160 \cdot c_3) \end{aligned} \quad (2.240)$$

$$\begin{aligned} {}^{T_5}d_{3_y} &= c_{34}s_5(-147 \cdot c_{34} + 160 \cdot s_3) \\ &\quad - s_{34}s_5(147 \cdot s_{34} + 160 \cdot c_3) \end{aligned} \quad (2.241)$$

$$\begin{aligned} {}^{T_5}d_{3_z} &= -s_{34}(-147 \cdot c_{34} + 160 \cdot s_3) \\ &\quad - c_{34}(147 \cdot s_{34} + 160 \cdot c_3) \end{aligned} \quad (2.242)$$

$${}^{T_5}\partial_{3_x} = s_5 \quad (2.243)$$

$${}^{T_5}\partial_{3_y} = c_5 \quad (2.244)$$

$${}^{T_5}\partial_{3_z} = 0 \quad (2.245)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores, el operador 6 dimensional queda así

$$\frac{\partial T_5}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} c_5[160 \cdot c_{34}s_3 + 147 + 160 \cdot s_{34}c_3] \\ s_5[160 \cdot s_4 - 147] \\ -160 \cdot c_4 \\ s_5 \\ c_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.246)$$

La cuarta columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_5 / \partial \theta_4$, donde T_5 está dada por (2.222);

$$\begin{aligned} {}^{T_5}d_{4_x} &= -c_4c_5(-147 \cdot c_4) \\ &\quad + s_4c_5(147 \cdot s_{34}) \end{aligned} \quad (2.247)$$

$$\begin{aligned} {}^{T_5}d_{4_y} &= c_4s_5(-147 \cdot c_4) \\ &\quad - s_4s_5(147 \cdot s_4) \end{aligned} \quad (2.248)$$

$$\begin{aligned} {}^{T_5}d_{4_z} &= -s_4(-147 \cdot c_4) \\ &\quad - c_4(147 \cdot s_4) \end{aligned} \quad (2.249)$$

$${}^{T_5}\partial_{4_x} = s_5 \quad (2.250)$$

$${}^{T_5}\partial_{4_y} = c_5 \quad (2.251)$$

$${}^{T_5}\partial_{4_z} = 0 \quad (2.252)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores, el operador 6 dimensional queda así

$$\frac{\partial T_5}{\partial \theta_4} = \begin{bmatrix} 147 \cdot \ell_5 \\ 147 \cdot s_5 (\ell_4^2 - s_4^2) \\ 0 \\ s_5 \\ \ell_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.253)$$

La quinta y última columna del Jacobiano corresponde a $\partial T_5 / \partial \theta_5$, donde T_5 está dada por (2.221);

$${}^{T_5}d_{5_x} = 0 \quad (2.254)$$

$${}^{T_5}d_{5_y} = 0 \quad (2.255)$$

$${}^{T_5}d_{5_z} = 0 \quad (2.256)$$

$${}^{T_5}\partial_{4_x} = 0 \quad (2.257)$$

$${}^{T_5}\partial_{5_y} = 0 \quad (2.258)$$

$${}^{T_5}\partial_{5_z} = 1 \quad (2.259)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores, el operador 6 dimensional queda así

$$\frac{\partial T_5}{\partial \theta_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.260)$$

Cinemática de Velocidades

Adicional a la relación espacial entre los desplazamientos de cada articulación de un manipulador y del efector final es muy útil hallar la relación entre el vector de velocidades de articulación y las velocidades lineales y angulares del efector final. Las velocidades absolutas (relacionadas con el sistema de coordenadas de la base del robot) del sistema de coordenadas asociado con el elemento i se calculan a partir de las

velocidades absolutas del sistema de coordenadas asociado con el elemento inmediatamente anterior $i-1$ según las siguientes ecuaciones:

Para una articulación rotacional ($\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i$),

$$v_i = v_{i-1} + w_i \times p_{i-1,i} \quad (2.261)$$

$$w_i = w_{i-1} + \dot{\alpha}_i \mathcal{Z}_i \quad (2.262)$$

y para una articulación prismática ($\mathcal{R}_i = \mathcal{P}_i$),

$$v_i = v_{i-1} + w_i \times p_{i-1,i} + \dot{z}_i \mathcal{Z}_i \quad (2.263)$$

$$w_i = w_{i-1} \quad (2.264)$$

Donde,

w_i	Vector de velocidad angular del sistema de coordenadas ligado al elemento i
v_i	Vector de velocidad lineal del origen del sistema de coordenadas ligado al elemento i
\mathcal{Z}_i	Vector unitario de proyección del eje de movimiento de la articulación i

Combinando las ecuaciones (2.261)-(2.264) en notación espacial, la relación entre las velocidades del sistema de coordenadas del elemento i y las de la articulación [9] está dada por:

$$V_i = \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = J_i(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}) \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_2 & \dots & \mathcal{R}_i \end{bmatrix}^T \quad (2.265)$$

Donde $J_i \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ es el Jacobiano del elemento i como se definió anteriormente. El Jacobiano del manipulador J_n se obtiene de la ecuación (2.265) con $i=n$. Por lo tanto, las velocidades angulares y lineales del efector final se obtienen de la ecuación lineal

$$V = J(q) \dot{q} \quad (2.266)$$

Cinemática de Aceleraciones

Las aceleraciones de articulación se calculan de la misma forma que las velocidades de articulación.

Para una articulación rotacional ($\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i$ y $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$),

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \dot{\mathcal{R}}_{i-1} + \dot{\mathcal{R}}_i \times p_{i-1,i} + w_i \times (w_i \times p_{i-1,i}) \quad (2.267)$$

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \dot{\mathcal{R}}_{i-1} + \dot{z}_{i-1} \mathcal{R}_i + w_i \times (z_{i-1} \mathcal{R}_i) \quad (2.268)$$

y para una articulación prismática ($\dot{\mathcal{R}}_i = \dot{\mathcal{R}}_i$ y $\dot{\mathcal{R}}_i = \dot{\mathcal{R}}_i$),

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \dot{\mathcal{R}}_{i-1} + \dot{\mathcal{R}}_i \times p_{i-1,i} + w_i \times (w_i \times p_{i-1,i}) + \dot{z}_{i-1} \mathcal{R}_i + 2w_i \times (z_{i-1} \mathcal{R}_i) \quad (2.269)$$

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \dot{\mathcal{R}}_{i-1} \quad (2.270)$$

Que se representan en notación espacial como,

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{R}}_i \\ \dot{\mathcal{R}}_i \end{bmatrix} = J_i(q_1, q_2, K, q_{i-1}) \mathcal{R}_i + J_i(q_1, q_2, K, q_{i-1}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, K, \dot{q}_{i-1}) \mathcal{R}_i \quad (2.271)$$

Singularidades Cinemáticas

Generalmente, las velocidades de los sistemas de coordenadas de los elementos que corresponden a un conjunto particular de velocidades lineales y angulares del efector final pueden obtenerse de la relación inversa de (2.266),

$$\mathcal{R} = J^{-1}(q) V \quad (2.272)$$

Esta relación existe solo para configuraciones en las cuales la inversa de la matriz Jacobiana existe, es decir, en configuraciones no singulares. En configuraciones singulares, el efector final no puede moverse en alguna/s dirección/es; entonces pierde uno o más grados de libertad. En esta situación la matriz del Jacobiano decrece en rango, es decir, dos o más columnas de la matriz se vuelven linealmente dependientes dando como resultado un determinante nulo. Las configuraciones singulares más comunes para manipuladores de 6 grados de libertad se listan en [10];

1. Dos articulaciones rotacionales colineales
2. Tres articulaciones rotacionales coplanares
3. Cuatro ejes de articulaciones rotacionales intersectantes en un punto
4. Cuatro articulaciones rotacionales coplanares
5. Seis articulaciones rotacionales intersectándose a lo largo de una línea
6. Un eje de articulación prismática perpendicular a dos articulaciones rotacionales paralelas y coplanares.

Precisión y Repetibilidad

Los robots son medidos con base en su habilidad para retornar a la misma posición cuando se requiere de movimiento repetitivo. Las posiciones y orientaciones (particularmente del efector final) obtenidas para un número cualquiera de movimientos repetidos pueden no ser idénticos. Las fuentes de error que producen estas diferencias,

- Definiciones de control interno
- Errores en transformación de coordenadas
- Diferencias entre las dimensiones de la estructura articulada y aquellas utilizadas en el modelo de robot del sistema de control
- Las faltas mecánicas como espacios, backlash en los elementos de transmisión de fuerza, histéresis, fricción e influencias externas como temperatura

La repetibilidad de un manipulador es el error máximo esperado en cualquier localización con respecto al promedio de localización obtenido de los movimientos repetidos.

La precisión de un robot se mide como el error entre la localización obtenida y la localización deseada.

Ambos factores se relacionan con el problema cinemático.

La precisión (AP) de una pose asumida por un brazo manipulador expresa la desviación entre la pose comandada y la media de la pose obtenida cuando ésta se aproxima a la posición comandada desde la misma dirección.

La precisión se divide en componentes de posición y orientación:

- a) La precisión de posicionamiento: es la diferencia entre la posición de una pose comandada y el baricentro de la posición obtenida, Ilustración 3
- b) La precisión en orientación: es la diferencia entre la orientación de una pose comandada y el promedio de las orientaciones obtenidas, Ilustración 4

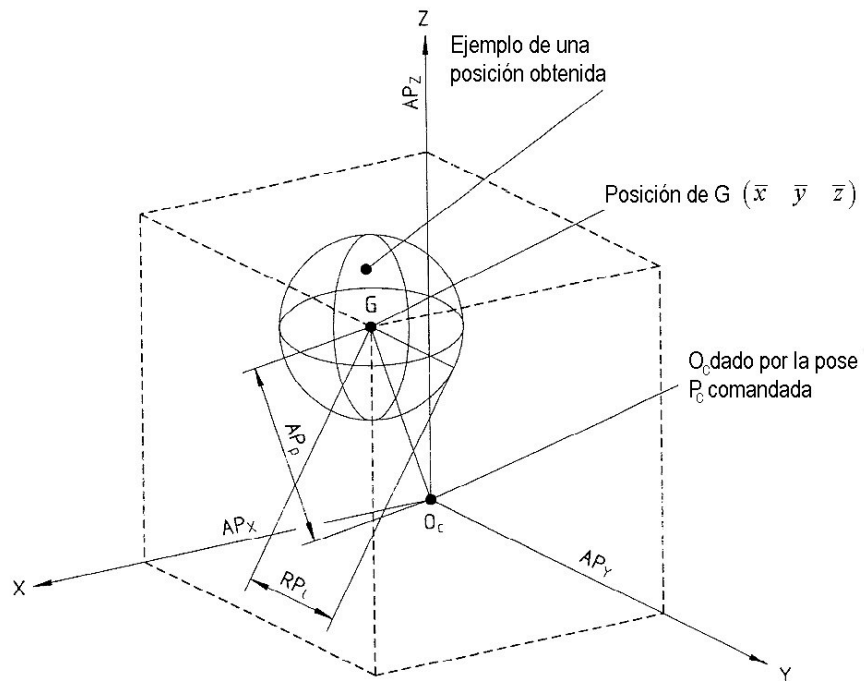


Ilustración 3 Precisión y Repetibilidad en Posición

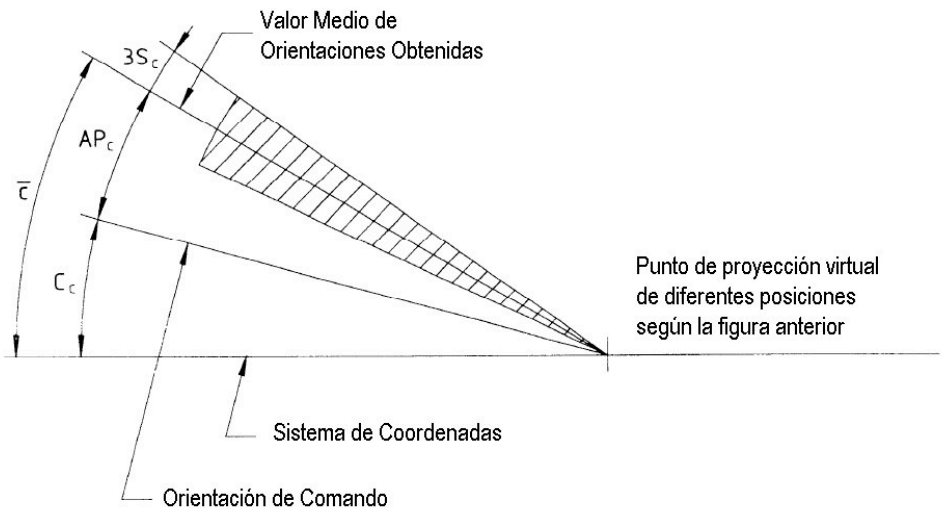


Ilustración 4 Precisión y Repetibilidad en Orientación

La precisión en posición se determina de la siguiente manera:

$$AP_p = \sqrt{(\bar{x} - x_c)^2 + (\bar{y} - y_c)^2 + (\bar{z} - z_c)^2} \quad (2.273)$$

$$AP_x = (\bar{x} - x_c)$$

$$AP_y = (\bar{y} - y_C)$$

$$AP_{\bar{x}} = (\bar{x} - x_C)$$

con

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

\bar{x} , \bar{y} y \bar{x} son las coordenadas del baricentro del cluster de puntos obtenidos luego de repetir una pose n veces.

x_C, y_C y x_C son las coordenadas de la pose comandada;

x_j, y_j y x_j son las coordenadas de la pose j -ava obtenida.

La precisión en orientación se determina de las siguientes expresiones,

$$AP_a = (\bar{a} - a_C) \quad (2.274)$$

$$AP_b = (\bar{b} - b_C)$$

$$AP_c = (\bar{c} - c_C)$$

con

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$$

$$\bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j$$

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j$$

Estos valores son los valores medios de los ángulos obtenidos en la misma pose repetida n veces.

a_C, b_C y c_C son las coordenadas de la pose comandada;

a_j, b_j y c_j son las coordenadas de la pose j -ava obtenida.

La repetibilidad (RP) de pose expresa la cercanía entre las poses obtenidas luego de n visitas repetidas a la misma pose comandada en la misma dirección.

Para una pose dada, la repetibilidad se expresa por

- El valor de RP_l , que es el radio de la esfera cuyo centro es el baricentro y que se calcula como se indica a continuación (ver Ilustración 3);
- La dispersión de ángulos $\pm 3S_a, \pm 3S_b, \pm 3S_c$ sobre los valores medios, \bar{a}, \bar{b} , y \bar{c} donde S_a, S_b y S_c corresponden a las desviaciones estándar (ver Ilustración 4).

Donde la repetibilidad en posición está dada por,

$$RP_l = \bar{l} + 3S_l \quad (2.275)$$

con

$$l = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j$$

$$l_j = \sqrt{(x_j - \bar{x})^2 + (y_j - \bar{y})^2 + (z_j - \bar{z})^2}$$

con \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} definidas como las coordenadas del baricentro del cluster de puntos obtenidos luego de repetir una pose n veces y x_j, y_j y z_j definidas como las coordenadas de la pose j -ava obtenida.

$$S_l = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (l_j - \bar{l})^2}{n-1}}$$

La repetibilidad en orientación está dada por,

$$RP_a = \pm 3S_a = \pm 3 \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (a_j - \bar{a})^2}{n-1}}$$

$$RP_b = \pm 3S_b = \pm 3 \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (b_j - \bar{b})^2}{n-1}} \quad (2.276)$$

$$RP_c = \pm 3S_c = \pm 3 \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (c_j - \bar{c})^2}{n-1}}$$

Los criterios pueden calcularse aún si las distancias no están distribuidas normalmente.

La variación en precisión de una pose multidireccional (vAP) expresa la desviación entre las diferentes poses medias logradas obtenidas cuando se visita la misma pose comandada n veces desde tres direcciones ortogonales (ver Ilustración 5).

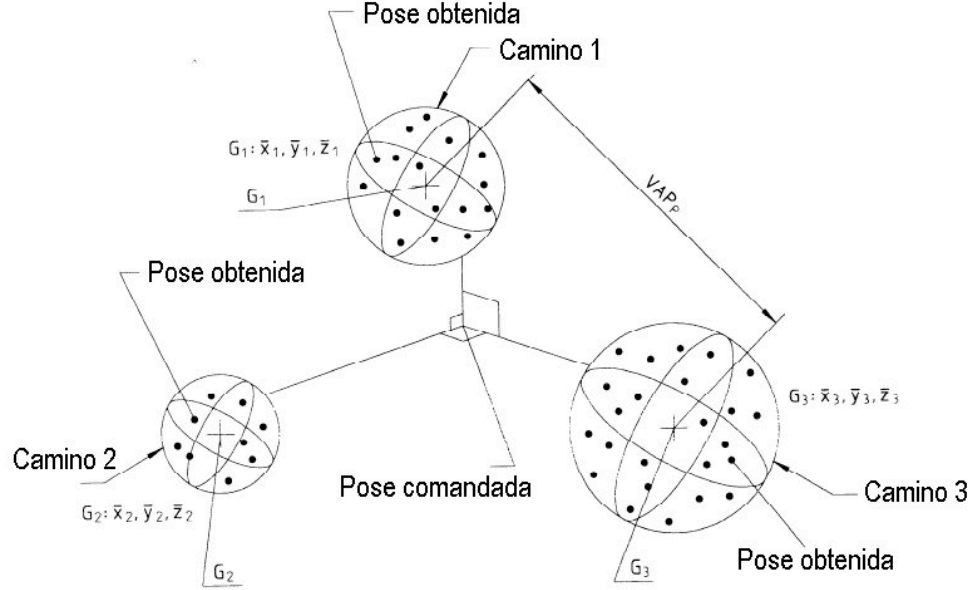


Ilustración 5 Variación de precisión en pose multidireccional (vAP)

- vAP_p es la distancia máxima entre los baricentros del cluster de puntos logrados al final de los diferentes caminos
- vAP_a, vAP_b, vAP_c es la desviación máxima entre los valores medios de los ángulos logrados al final de los diferentes caminos.

La precisión de una pose multidireccional se calcula de la siguiente manera:

$$vAP_l = \max \sqrt{(\bar{x}_b - \bar{x}_k)^2 + (\bar{y}_b - \bar{y}_k)^2 + (\bar{z}_b - \bar{z}_k)^2} \quad b, k = 1, 2, 3 \quad (2.277)$$

Son tres el número de caminos de aproximación.

$$\begin{aligned} vAP_a &= \max |(\bar{a}_b - \bar{a}_k)| & b, k &= 1, 2, 3 \\ vAP_b &= \max |(\bar{b}_b - \bar{b}_k)| & b, k &= 1, 2, 3 \\ vAP_c &= \max |(\bar{c}_b - \bar{c}_k)| & b, k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.278)$$

El robot se programa para mover su interfaz mecánica a las poses de acuerdo con los tres caminos de aproximación paralelo a los ejes del sistema de coordenadas de la base.

Precisión y Repetibilidad en Distancia

Esta característica es aplicable únicamente sobre robots con la facilidad para ser programados fuera de línea o por entrada manual de datos.

Las características de precisión y repetibilidad en distancia cuantifican las desviaciones que ocurren entre la distancia de dos poses comandadas y dos conjuntos de poses medias logradas, y las fluctuaciones en distancias para una serie de movimientos repetidos entre las dos poses.

La precisión y repetibilidad en distancia puede medirse comandando la pose en una de dos formas:

- comandando ambas poses utilizando programación fuera de línea
- comandando una pose por enseñanza y programando una distancia por medio de la entrada de datos manuales.

La precisión en distancia (ΔD) expresa la desviación en posición y orientación entre la distancia comandada y la media de las distancias logradas.

Dado que las poses comandadas son P_{C1}, P_{C2} y las poses logradas son P_{1j}, P_{2j} , la precisión en distancia de posicionamiento es la diferencia entre P_{C1}, P_{C2} y P_{1j}, P_{2j} (ver Ilustración 6) y la distancia repetida n veces.

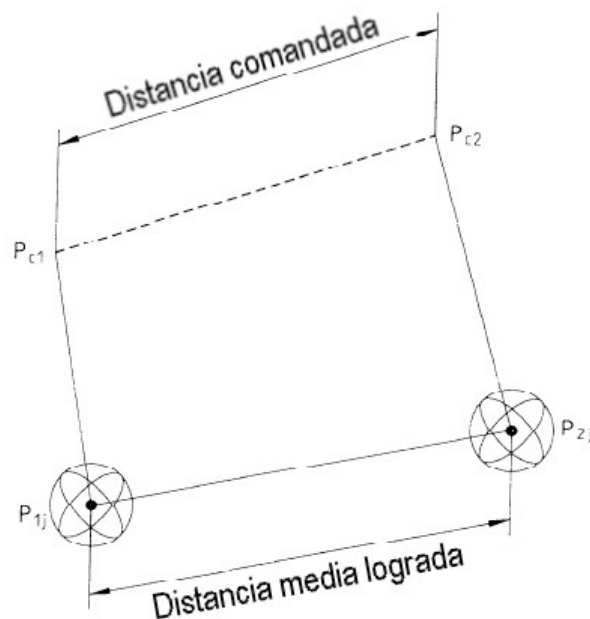


Ilustración 6 Precisión en distancia

La precisión en distancia se determina por medio de los dos factores precisión en distancia de posicionamiento y precisión en distancia de orientación.

La precisión en distancia de posicionamiento, AD_p , se calcula de la siguiente manera,

$$AD_p = \bar{D} - D_C \quad (2.279)$$

donde

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D_j$$

$$D_j = |P_{1j} - P_{2j}| = \sqrt{(x_{1j} - x_{2j})^2 + (y_{1j} - y_{2j})^2 + (z_{1j} - z_{2j})^2}$$

$$D_C = |P_{C1} - P_{C2}| = \sqrt{(x_{C1} - x_{C2})^2 + (y_{C1} - y_{C2})^2 + (z_{C1} - z_{C2})^2}$$

con

x_{C1}, y_{C1}, z_{C1} como las coordenadas de P_{C1} disponibles en el controlador del robot.

x_{C2}, y_{C2}, z_{C2} como las coordenadas de P_{C2} disponibles en el controlador del robot

x_{1j}, y_{1j}, z_{1j} como las coordenadas de P_{1j}

x_{2j}, y_{2j}, z_{2j} como las coordenadas de P_{2j}

n como el número de repeticiones.

La precisión en distancia de posicionamiento puede también expresarse para cada eje del sistema de coordenadas de la base. Los cálculos son en este caso dados por,

$$AD_x = \bar{D}_x - D_{C_x}$$

$$AD_y = \bar{D}_y - D_{C_y}$$

$$AD_z = \bar{D}_z - D_{C_z}$$

donde

$$\bar{D}_x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D_{xj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_{1j} - x_{2j}|$$

$$\bar{D}_y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D_{yj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |y_{1j} - y_{2j}|$$

$$\bar{D}_z = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D_{zj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |z_{1j} - z_{2j}|$$

$$D_{Cx} = |x_{C1} - x_{C2}|$$

$$D_{Cy} = |y_{C1} - y_{C2}|$$

$$D_{Cz} = |z_{C1} - z_{C2}|$$

La precisión en distancia de orientación se calcula de igual manera que la precisión en distancia de un eje sencillo

$$AD_a = \bar{D}_a - D_{Ca}$$

$$AD_b = \bar{D}_b - D_{Cb}$$

$$AD_c = \bar{D}_c - D_{Cc}$$

donde

$$\bar{D}_a = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D_{aj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |a_{1j} - a_{2j}|$$

$$\bar{D}_b = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D_{bj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |b_{1j} - b_{2j}|$$

$$\bar{D}_c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D_{cj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |c_{1j} - c_{2j}|$$

$$D_{Ca} = |a_{C1} - a_{C2}|$$

$$D_{Cb} = |b_{C1} - b_{C2}|$$

$$D_{Cc} = |c_{C1} - c_{C2}|$$

con

a_{C1}, b_{C1}, c_{C1} como las coordenadas de P_{C1} disponibles en el controlador del robot.

a_{C2}, b_{C2}, c_{C2} como las coordenadas de P_{C2} disponibles en el controlador del robot

a_{1j}, b_{1j}, c_{1j} como las coordenadas de P_{1j}

a_{2j}, b_{2j}, c_{2j} como las coordenadas de P_{2j}

n como el número de repeticiones.

La repetibilidad en distancia (RD) es la cercanía entre varias distancias logradas para la misma distancia comandada, repetida n veces en la misma dirección.

La repetibilidad en distancia incluye repetibilidad en posición y orientación.

La repetibilidad en distancia para una distancia comandada se calcula de la siguiente manera,

$$RD = \pm 3 \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (D_j - \bar{D})^2}{n-1}} \quad (2.280)$$

$$RD_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (D_{xj} - \bar{D}_x)^2}{n-1}}$$

$$RD_y = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (D_{yj} - \bar{D}_y)^2}{n-1}}$$

$$RD_z = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (D_{zj} - \bar{D}_z)^2}{n-1}}$$

Para la precisión en orientación se aplican los siguientes cálculos,

$$\begin{aligned} RD_a &= \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (D_{aj} - \bar{D}_a)^2}{n-1}} \\ RD_b &= \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (D_{bj} - \bar{D}_b)^2}{n-1}} \\ RD_c &= \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (D_{cj} - \bar{D}_c)^2}{n-1}} \end{aligned} \quad (2.281)$$

Algoritmos

Referencias

1. B. Roth, "Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint", Performance Evaluation of Manipulators, National Bureau of Standards, special publication, 1975.
2. D. Pieper, "The Kinematics of Manipulators Under Computer Control" Unpublished Ph.D. thesis, Stanford University, 1968.
3. H.Y., Lee y C.G., Liang, "Displacement Analysis of the General Spatial 7-Link 7R Mechanism." Mechanism and Machine Theory, 23, 219-226, 1998.
4. R.G., Selfridge, "Analysis of 6-Link Revolute Arms", Mechanism and Machine Theory, 24 (1), 1-8, 1989.
5. C., Mavroidis, y B., Roth, "Structural Parameters Which Reduce the Number of Manipulator Configurations", Journal of Mechanical Design, 116, 3-10, 1994.
6. J., Duffy, "Analysis of Mechanisms and Manipulators", John Wiley & Sons, 1980.
7. M., Raghavan y B., Roth, "Inverse kinematics of Manipulators Under Computer Control", Proceedings 2nd International Congress for the Theory of Machines and Mechanisms, Zakopane, Poland. Vol. 2. 159-168. 1993.
8. R.P., Paul, Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control, MIT Press, 1981.
9. D.E. Whitney, "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prosthesis", IEEE Transactions on Man-Machine Systems, 10(2), 47-53, 1969.
10. R.M. Murray, Z. Li, y S.S. Sastry, A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, London: CRC Press, 1994.
11. S. Y., Nof, "Handbook of Industrial Robotics", 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, 1999.
12. R.C. Dorf, S. Y., Nof, "International Encyclopedia of Robotics: Applications and Automation", Vol. 1-3, John Wiley & Sons, New York, 1988.
13. K.S. Fu, R.C. González y C.S.G. Lee, "Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia", McGraw-Hill, España, 1988.
14. Barrientos, L.F. Peñin, C. Balaguer, R. Aracil, "Fundamentos de Robótica", McGraw-Hill, España, 1998.

Glosario de Términos

Indice

C

Cinemática (de Robots)
 Cinemática de aceleraciones, 53
 Cinemática de velocidades, 52
 Cinemática Directa, 4, 11, 15, 17, 18
 Cinemática Inversa, 5, 20, 24, 29, 33
 Método Algebraico Cerrado, 22
 Método Geométrico, 35
 Espacio de trabajo, 21
 Espacio de trabajo alcanzable, 21
 Espacio de trabajo dextroso, 21
 Grafo de Transformaciones Espaciales, 13
 Manipuladores Redundantes, 21
 Singularidades Cinemáticas, 54

E

eliminación dialítica, 21

J

Jacobiano de un Manipulador, 42, 44, 45, 46,
47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54

P

Precisión (de Robots), 55

R

Repetibilidad (de Robots), 55
Robot Mitsubishi RV-M1, 18, 19, 33, 35, 36,
37, 48
Robot Puma (Unimate), 4
Robot Stanford, 15, 24, 44, 45, 46, 47, 65

T

Transformaciones Espaciales
 Translación, 10, 12, 15, 22, 39