

# **Dinámica de Manipuladores Robóticos**

# Tabla de Contenido

<b>DINÁMICA.....</b>	<b>5</b>
CONCEPTOS GENERALES .....	5
DESCRIBIENDO EL MOVIMIENTO DE CADENAS SERIALES MULTICUERPO .....	6
DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS .....	6
ALGEBRA DE OPERADORES ESPACIALES EN LA DESCRIPCIÓN DINÁMICA DE MULTICUERPOS ..	6
<i>Notación espacial 6-dimensional</i> .....	7
Velocidades, aceleraciones, y fuerzas espaciales .....	8
Operadores de transformación .....	8
<i>Distribución de Masa</i> .....	10
DINÁMICA DE UN CUERPO RÍGIDO SENCILLO.....	15
DINÁMICA DE MULTICUERPOS SERIALES RÍGIDOS.....	21
<i>Recordando el principio de d'Alambert (en notación vectorial 3x1)</i> .....	22
<i>Ecuaciones Cinemáticas</i> .....	22
EL SISTEMA COMPLETO DE ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA CADENAS MULTICUERPO	24
<i>Interpretación física de las ecuaciones en la Figura 7</i> .....	24
EL PROBLEMA DINÁMICO DIRECTO .....	28
<i>Motivación</i> .....	28
<i>Fundamentos</i> .....	28
El Complemento de Schur.....	29
<i>Formalización</i> .....	29
Macro Algoritmo .....	34

## Lista de Ejemplos

## Lista de Figuras

## Dinámica

Trata con las formulaciones matemáticas de las ecuaciones de movimiento de un brazo para describir su conducta dinámica. Son útiles para la simulación en computador del movimiento del robot, del diseño de ecuaciones de control apropiadas para el robot y la evaluación del diseño y estructura del brazo. El problema de control consiste en obtener modelos dinámicos del brazo del robot físico y a continuación especificar leyes o estrategias de control correspondientes para conseguir la respuesta y rendimiento del sistema deseado. El modelo dinámico se puede conseguir a partir de las leyes físicas conocidas tales como las leyes de la mecánica Newtoniana y Lagrangiana.

Métodos convencionales como las formulaciones de Lagrange-Euler (L-E) y Newton-Euler se pueden aplicar entonces sistemáticamente para desarrollar las ecuaciones de movimiento de un robot.

## Conceptos Generales

Al evaluar el comportamiento dinámico de cualquier sistema (mecanismos, moléculas, etc.) se consideran dos problemas básicos. Los cuerpos sometidos a fuerzas tienden a acelerar, entonces el primer problema está en determinar el movimiento inducido sobre el cuerpo por el conjunto de fuerzas aplicadas - denominado comúnmente como el problema *dinámico directo*. El segundo problema, denominado como el problema *dinámico inverso*, es el de determinar las fuerzas requeridas para producir un movimiento predefinido sobre el sistema.

*En este capítulo se describen los conceptos fundamentales de la mecánica clásica relacionados con el modelado dinámico de cuerpos, y se establece una representación matemática apropiada para las cantidades involucradas dentro del mismo proceso. En principio se ofrece una descripción independiente de coordenadas de los parámetros cinemáticos, como velocidad y aceleración. Esto simplifica la notación y ofrece una descripción independiente del observador. Sin embargo, será necesario asignar sistemas de coordenadas en el momento de requerir números concretos para relacionar diferentes objetos en el espacio. Se asume que todas las cantidades relativas se miden con respecto a un reloj común y que el comportamiento del movimiento para cuerpos rígidos es determinístico. El capítulo comienza con la formulación de las ecuaciones de movimiento básicas para sistemas multicuerpo (y que serán empleadas en el resto del documento) y termina relacionando y describiendo los métodos actualmente más representativos para el mismo propósito.*

Se emplearán operadores espaciales [Featherstone, 1983; Rodríguez, Jain, y Kreutz-Delgado, 1991], para describir de una manera condensada las expresiones que definen el movimiento de los cuerpos en el espacio euclidiano tridimensional.

## **Describiendo el Movimiento de Cadenas Seriales Multicuerpo**

Las cadenas seriales de cuerpos rígidos se definen, a partir de este punto, como los bloques primitivos para la conformación de sistemas multicuerpo en general. En esta sección se describe un conjunto compacto de ecuaciones para resolver la dinámica de una cadena serial de cuerpos y se presentan a manera de descripción del estado del arte en esta tecnología una serie de algoritmos que han sido propuestos en el pasado para resolver este problema. Todos éstos algoritmos emergen naturalmente como consecuencia de la explotación de la estructura de la matriz de masa de un sistema multicuerpo. Los algoritmos desarrollados aquí también aprovechan esta característica, pero a diferencia de los demás permiten la paralelización efectiva y escalable de las ecuaciones de movimiento para aplicaciones en simulaciones de DM de sistemas a alta escala.

## **Dinámica de cuerpos rígidos**

Un objeto que no puede ser deformado por las fuerzas que actúan sobre él se denomina como *Cuerpo Rígido*. Un cuerpo rígido puede ser visto como una colección de partículas puntuales, cada una de ellas restringida a mantener una distancia fija con respecto a las demás. A pesar de que un cuerpo rígido no puede modelarse matemáticamente de manera exacta, es posible modelar la dinámica de muchos objetos a través de su descripción como si fueran cuerpos teóricamente rígidos.

Para facilitar la descripción del movimiento en sistemas multicuerpo complejos es imperativo tener un modelo compacto para su representación. El uso de operadores espaciales se sugiere y se discute para este propósito. Los apéndices I y II describen de forma vectorial, a manera de referencia, las contrapartes en notación espacial que serán desarrolladas en este capítulo.

## **Algebra de operadores espaciales en la descripción dinámica de multicuerpos**

El empleo del álgebra espacial para la representación de modelos dinámicos de sistemas multicuerpos fue empleada, quizás por primera vez, por Roy Featherstone [Featherstone, 1983] en el desarrollo de las inercias de cuerpos articulados (*Articulated Body Inertias*). Sin embargo no es un concepto nuevo y puede encontrarse en publicaciones anteriores donde ha sido empleada para problemas diversos de modelamiento [Roma 1975, Rudin 1973]. A través de operadores espaciales Featherstone plantea una solución para el problema dinámico directo por medio de un operador de masa definido a partir de las características inerciales de elementos articulados.

En esta sección, se hace una breve revisión de los elementos de dicha álgebra dentro del contexto de dinámica de sistemas multicuerpo rígidos, que incluye la definición de operadores lineales cuyos dominios y rangos espaciales consisten en fuerzas, momentos, velocidades, y aceleraciones. Los operadores espaciales tienen esta denominación particular dado que permiten mostrar como estas cantidades físicas se propagan por el espacio desde un cuerpo rígido hasta el siguiente. Además, permiten la formulación concisa y sistemática de las ecuaciones de movimiento y una mayor facilidad para la interpretación física del comportamiento dinámico de los sistemas bajo simulación y modelado (en contraste con la notación del álgebra vectorial). Esto a su vez conlleva al desarrollo de algoritmos computacionales eficientes.

En el caso particular de la dinámica de multicuerpos, veremos como es posible reconocer a partir de las expresiones globales patrones matemáticos de alto nivel asociados con la matriz de masa, que de otra forma serían difíciles de detectar. Esto se debe en parte a la reducción en el número de símbolos requeridos para expresar la solución particular y también a la presencia de conceptos familiares, y mejor establecidos desde el punto de vista teórico, provenientes de otras áreas del conocimiento como la teoría de estimación [Rodríguez, Jain, Krautz-delgado; 92].

### Notación espacial 6-dimensional

En notación espacial se representan la velocidad, la aceleración, y las fuerzas como vectores columna  $\in \mathfrak{R}^{6 \times 1}$ , donde cada uno incorpora los componentes angulares y lineales apilados (3 rotacionales y 3 traslacionales).

Para mayor claridad sobre la definición de los símbolos empleados, de aquí en adelante, se recomienda hacer referencia al capítulo 1 sección 5.

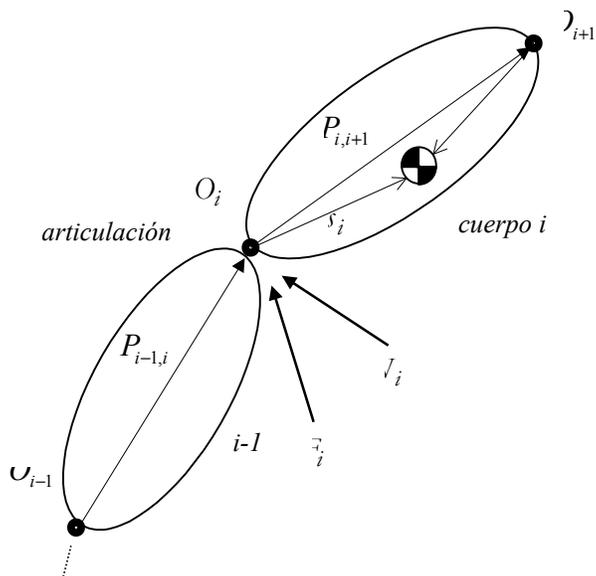


Figura 1 Cantidades físicas definidas para la dinámica de multicuerpos

### Velocidades, aceleraciones, y fuerzas espaciales

Las velocidades lineales y angulares ( $v$ ,  $w$ ), y las fuerzas traslacionales ( $f$ ) y rotacionales ( $N$ ) en  $\mathfrak{R}^3$  están definidas para cualquier punto de un cuerpo en función de la velocidad espacial (inercial) ( $V$ ), la aceleración espacial (inercial)  $\mathcal{V}$  y la fuerza espacial  $F$  en  $\mathfrak{R}^6$  de la siguiente forma,

$$V \equiv \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad F \equiv \begin{bmatrix} N \\ f \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

### Operadores de transformación

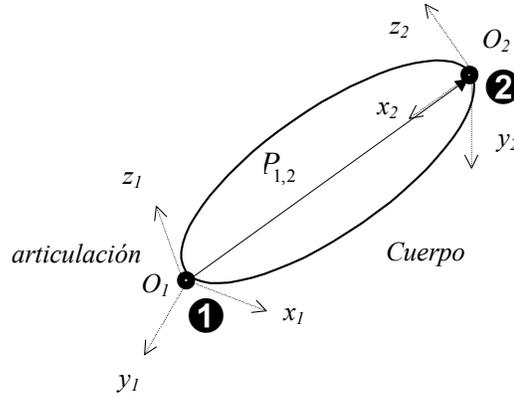


Figura 2 Operadores de transformación

Con el fin de operar y manipular cantidades físicas de cuerpos diferentes es necesario poder propagar y proyectar dichas cantidades sobre sistemas de coordenadas comunes. Para lograr esto se definen también operadores de translación (representados por vectores de distancia entre dos puntos) y de rotación (para referenciar cantidades sobre una base de coordenadas común),

$$\hat{P}_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} U & \mathcal{P}_{1,2} \\ 0 & U \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$R_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} r_{1,2} & 0 \\ 0 & r_{1,2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Donde  $U \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  corresponde al operador de indentidad,  $p_{1,2} \in \mathfrak{R}^3$  corresponde a cualquier vector que une dos puntos (indicando un sentido de dirección desde el punto 1 hacia el 2),  $r_{1,2} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  corresponde a la matriz básica de rotación que proyecta cualquier punto en el sistema de coordenadas 2 sobre el sistema de coordenadas 1, y donde

$$\mathcal{P}_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

es la matriz *skew* simétrica correspondiente al operador de producto cruz de vectores.  $\hat{P}_{i,j}$  y  $\mathcal{P}_{i,j}$  tienen además las siguientes propiedades para cualquier punto en el espacio,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{i,j} p_{k,l} &= p_{i,j} \times p_{k,l} \\ -\mathcal{P}_{i,j} p_{k,l} &= \mathcal{P}_{k,i} p_{i,j} = p_{k,l} \times p_{i,j} \\ \mathcal{P}_{i,j} &= -\mathcal{P}_{j,i} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\hat{P}_{i,j} \hat{P}_{k,l} = \hat{P}_{i,l}$$

$$(\hat{P}_{i,j})^{-1} = \hat{P}_{j,i}$$

$$\hat{P}_{i,j}^T \equiv \begin{bmatrix} U & 0 \\ -\mathcal{P}_{i,j} & U \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\hat{P}_{i,j} \hat{P}_{i,j} \equiv \begin{bmatrix} U & \mathcal{P}_{i,j} \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_{i,j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_{i,j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{P}_{i,j} = -\hat{P}_{j,i}$$

$$\hat{P}_{i,j}^T \hat{P}_{i,j}^T \equiv \begin{bmatrix} U & 0 \\ -\mathcal{P}_{i,j} & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{P}_{i,j} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{P}_{j,i} & 0 \end{bmatrix} = \hat{P}_{i,j}^T = -\hat{P}_{j,i}^T$$

$$\hat{P}_{i,j} \hat{P}_{j,i} \equiv \begin{bmatrix} U & \mathcal{P}_{i,j} \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_{j,i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_{j,i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{P}_{j,i} = -\hat{P}_{i,j}$$

$$\hat{P}_{i,j}^T \hat{P}_{j,i}^T \equiv \begin{bmatrix} U & 0 \\ -\mathcal{P}_{i,j} & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{P}_{j,i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{P}_{j,i} & 0 \end{bmatrix} = \hat{P}_{j,i}^T = -\hat{P}_{i,j}^T \quad (1.7)$$

La matriz de inercia espacial (6x6) de un cuerpo también se obtiene de la combinación de su masa y su primer y segundo momento de masa con respecto al punto de interés sobre el cuerpo. A partir de la combinación de las matrices espaciales de inercia de cada cuerpo se define un operador de mayor nivel de la matriz espacial de inercia del sistema multicuerpo completo.

Asumiendo que un cuerpo tiene una masa  $m_i$  y un tensor de inercia  $J_{i,cm}$  alrededor de su centro de masa,  $cm$ , se define el operador de inercia espacial de la siguiente manera,

$$I_{i,cm} \equiv \begin{bmatrix} J_{i,cm} & 0 \\ 0 & m_i U \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6} \quad (1.8)$$

Donde,  $U$  es una vez más el operador 3x3 de identidad.

## Distribución de Masa

Para cuerpos rígidos libres en movimiento tridimensional existen infinitos posibles ejes de rotación. La rotación sobre ejes arbitrarios exigen una manera completa para caracterizar la distribución de masa del cuerpo rígido. Esto se logra por medio del tensor de inercia.

El tensor de inercia se puede definir respecto de cualquier sistema de coordenadas de referencia, ligado o no al cuerpo rígido que representa. De manera general el tensor de inercia relativo a un sistema de coordenadas  $i$

(tomado sobre el volumen y con respecto del sistema de coordenadas que coincide con el centro de masa del elemento o en cualquier otro punto del mismo) se expresa en forma matricial de la siguiente manera:

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

donde los elementos escalares se definen por los momentos de inercia de masa - que expresan la resistencia a acelerar/desacelerar del cuerpo por medio de la integral sobre el volumen masico por el cuadrado de la distancia perpendicular desde el eje correspondiente -

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv$$

y los productos de masa inercial - que definen la distribución de masa a ambos lados del plano correspondiente -

$$I_{xy} = \iiint_V xy \rho dv$$

$$I_{xz} = \iiint_V xz \rho dv$$

$$I_{yz} = \iiint_V yz \rho dv \quad (1.10)$$

cuando el cuerpo rígido está compuesto de elementos diferenciales de masa volumétrica,  $dv$ , conteniendo material de densidad  $\rho$ . Cada elemento de volumen se localiza por medio de un vector de posición  $[x \ y \ z]^T$ . Este conjunto de cantidades independientes dependen de la posición y orientación del sistema coordenado en el cual se definen.

Para un sistema de cuerpos discretos los momentos de masa inercial serían,

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (1.11)$$

De igual manera, los productos de inercia están dados por,

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \\
I_{xz} &= \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\
I_{yz} &= \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i
\end{aligned} \tag{1.12}$$

**Ejemplo 1 Cálculo del Tensor de Inercia para un Cuerpo Rígido**

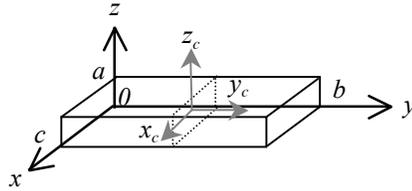


Figura 3 Cuerpo Rígido para Asignación de Tensor de Inercia

Suponiendo un elemento de brazo de sección rectangular se demuestra cómo calcular el tensor de inercia respecto del sistema de coordenadas  $oxyz$  y luego con respecto del centro de masa del elemento dado por  $x_c, y_c, z_c$ . Se asume que el origen del sistema de coordenadas del centro de masa está en las coordenadas  $\frac{c}{2}, \frac{b}{2}, \frac{a}{2}$ .

Primero calculamos  $I_{xx}$  utilizando los elementos de volumen  $dv = dx dy dz$ .

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c (y^2 + z^2) \rho dx dy dz \\
&= \int_0^a \int_0^b c (y^2 + z^2) \rho dy dz \\
&= \int_0^a c \left( \frac{b^3}{3} + z^2 b \right) \rho dz \\
&= \left( \frac{ab^3 c}{3} + \frac{a^3 bc}{3} \right) \rho \\
&= \frac{m}{3} (b^2 + a^2)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

donde  $m$  es la masa total del cuerpo. Por inspección, sabemos que:

$$I_{yy} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m}{3} (a^2 + c^2) \tag{1.14}$$

$$I_{z\bar{z}} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = \frac{m}{3} (b^2 + c^2) \quad (1.15)$$

Luego calculamos los productos de inercia,

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c xy \rho dx dy dz \\ &= \int_0^a \int_0^b \frac{c^2}{2} y \rho dy dz \\ &= \int_0^a \frac{b^2 c^2}{4} y \rho dz \\ &= \frac{m}{4} bc \end{aligned} \quad (1.16)$$

Permutando términos,

$$I_{xz} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c xz \rho dx dy dz = \frac{m}{4} ac \quad (1.17)$$

$$I_{yz} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c yz \rho dx dy dz = \frac{m}{4} ab \quad (1.18)$$

Entonces el tensor de inercia para este cuerpo está dado por

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(a^2 + b^2) & -\frac{m}{4}bc & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2 + c^2) & -\frac{m}{4}ab \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(b^2 + c^2) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

El tensor de inercia es una función de posición y orientación del sistema de referencia con el cual se mide. Para calcular el tensor de inercia respecto del centro de masa del elemento de la Figura 1 lo único que se tiene que hacer es cambiar los límites de las integrales anteriores.

$$I_{xx} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m}{12} (b^2 + a^2) \quad (1.20)$$

$$I_{yy} = \frac{m}{12} (a^2 + c^2), I_{zz} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2) \quad (1.21)$$

$$I_{xy} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} xy \rho dx dy dz = 0 \quad (1.22)$$

$$I_{xz} = 0, I_{yz} = 0 \quad (1.23)$$

Por lo tanto el tensor de inercia está dado por,

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(a^2 + b^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(b^2 + c^2) \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

El teorema de ejes paralelos define como el tensor de inercia cambia cuando el sistema de coordenadas de referencia se *traslada*. Es decir, relaciona el tensor de inercia en un marco de coordenadas con origen en el centro de masa con el tensor de inercia medido respecto de otro sistema de referencia (o con respecto a otro punto dentro del mismo sistema de coordenadas). Es decir, asumiendo  $cm$  como el centro de masa del cuerpo, el teorema expresa,

$$I_{xx_i} = I_{xx_{cm}} + m(y_{cm}^2 + z_{cm}^2) \quad (1.25)$$

$$I_{xy_i} = I_{xy_{cm}} - mx_{cm}y_{cm} \quad (1.26)$$

Los demás momentos y productos de inercia pueden calcularse permutando.

En la siguiente sección se derivan las ecuaciones dinámicas para un cuerpo rígido sencillo, empleando operadores espaciales, y subsecuentemente las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler para una cadena de cuerpos seriales unidos por articulaciones sencillas de un grado de libertad c/u.

Dinámica de un Cuerpo Rígido Sencillo

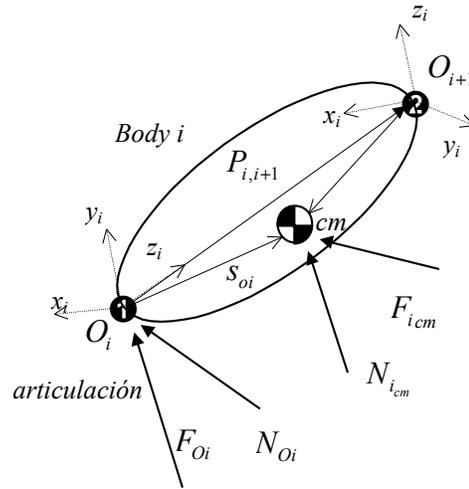


Figura 4 Operadores espaciales considerados para su descripción dinámica

Asumiendo que \$O\_i\$ y \$cm\$ son dos puntos sobre un cuerpo rígido \$i\$, y \$s\_{O\_i,cm}\$ el vector que va desde \$O\_i\$ hasta \$cm\$. Sean además, \$cm\$ el centro de masa del cuerpo rígido, \$v\_{i,cm}\$ y \$w\_{i,cm}\$ las velocidades traslacional y rotacional del cuerpo \$i\$ en/alrededor de \$cm\$, respectivamente, y \$f\_{i,cm}\$ y \$N\_{i,cm}\$ las fuerzas traslacional y rotacional, respectivamente. Entonces las fuerzas y velocidades en los puntos \$O\_i\$ y \$cm\$ están relacionados entre sí de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 w_{i,cm} &= w_{O_i} \\
 v_{i,cm} &= v_{O_i} + w_{O_i} \times s_{O_i,cm} \\
 f_{O_i} &= f_{cm} \\
 N_{O_i} &= N_{i,cm} + s_{O_i,cm} \times f_{i,cm}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

A partir de la ecuación (1.1) podemos reescribir las velocidades, aceleraciones y fuerzas espaciales con respecto al centro de masa,

$$V_{i,cm} \equiv \begin{bmatrix} w_{i,cm} \\ v_{i,cm} \end{bmatrix}, \quad V_{i,cm}^{\&} \equiv \begin{bmatrix} \dot{w}_{i,cm} \\ \dot{v}_{i,cm} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad F_{O_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{O_i} \\ f_{O_i} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

Definiendo \$\hat{S}\_{O\_i,cm}^T\$ y \$\hat{S}\_{O\_i,cm}\$ a partir de (1.2), se reescriben las ecuaciones en (1.27),

$$V_{i,cm} = \hat{S}_{O_i,cm}^T V_{O_i} \tag{1.29}$$

$$F_{O_i} = \hat{S}_{O_i,cm} F_{i,cm} \tag{1.30}$$

Las ecuaciones anteriores expresan que la velocidad en cualquier punto, \$cm\$ del cuerpo \$i\$, puede ser escrita en términos de cualquier otro punto \$O\_i\$, del

mismo cuerpo, propagadas por la distancia  $\hat{S}_{O_i,cm}^T$  que los separa. Igualmente, las fuerzas espaciales en cualquier punto  $O_i$  del mismo cuerpo  $i$  pueden ser definidas a partir de las fuerzas espaciales actuando sobre el punto  $cm$ .

Derivando la ecuación (1.29) con respecto al tiempo se obtiene la expresión que define la aceleración espacial del cuerpo en/sobre un punto  $cm$ ,

$$\mathcal{I}_{i,cm}^{\&} = \hat{S}_{O_i,cm}^T \mathcal{I}_{O_i}^{\&} + \mathcal{J}_{O_i,cm}^T V_{O_i} \quad (1.31)$$

Donde, el segundo término representa la aceleración de Coriolis y la aceleración centrífuga (ambos dependientes directamente de velocidad) en el punto  $O_i$ , que se define como,

$$b_{O_i} \equiv \mathcal{J}_{O_i,cm}^T V_{O_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}^{\&} & 0 \\ -\mathcal{J}_{O_i,cm}^{\&} & \mathcal{I}^{\&} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{O_i} \\ v_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{J}_{O_i,cm}^{\&}}{\partial t} w_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \mathcal{J}_{O_i,cm}^{\&}}{\partial t} S_{O_i,cm} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Efecto Traslacional

Donde

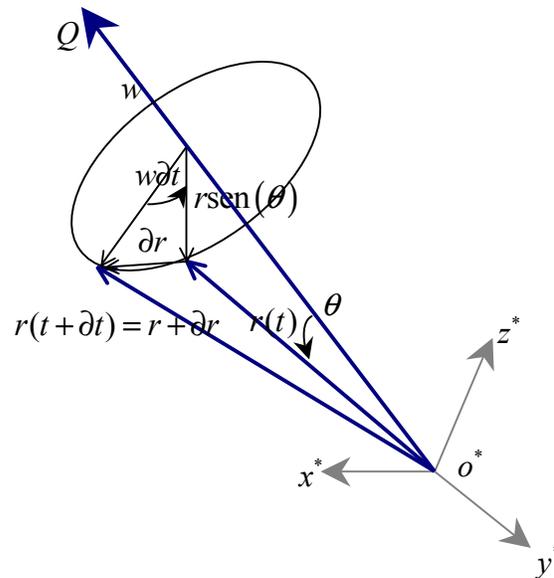


Figura 5 Derivada Respecto al Tiempo de Sistema de Coordenadas Rotante

Suponiendo un sistema de coordenadas con asterisco, como el de la Figura 5, girando respecto de un eje  $oQ$ , con velocidad angular  $w$  (ésta se define como un vector de magnitud  $w$  dirigido a lo largo del eje  $oQ$  en la dirección de una rotación con la regla de la mano derecha en el sistema de coordenadas giratorio. Sea  $r$  un vector fijo con respecto a dicho sistema.

Su derivada es nula y queremos demostrar que su derivada con respecto a otro sistema de coordenadas diferente es

$$\frac{dr}{dt} = w \times r \quad (1.33)$$

Que es equivalente por definición a la derivada de un vector

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\partial t \rightarrow 0} \frac{r(t + \partial t) - r(t)}{\partial t} \quad (1.34)$$

Es decir

$$w \times r = \lim_{\partial t \rightarrow 0} \frac{r(t + \partial t) - r(t)}{\partial t} \quad (1.35)$$

A partir de la Figura 5 y recordando que un vector tiene magnitud y dirección verificamos que la ecuación (1.33) sea correcta en ambas. Sabemos que la magnitud de  $dr/dt$  es

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = |w \times r| = wr \text{sen}(\theta) \quad (1.36)$$

Siendo  $\partial t$  pequeño, entonces es evidente a partir de la Figura 5 que

$$|\partial r| = (r \text{sen}(\theta))(w \partial t) \quad (1.37)$$

La dirección de  $w \times r$  se puede encontrar de la definición del producto vectorial que es perpendicular a  $r$  y en el plano del círculo que se muestra en la Figura 5.

A partir de la ecuación (1.32) se reescribe la ecuación (1.44) en forma simplificada como,

$$I_{i,cm} \mathcal{I}_{i,cm} = \hat{S}_{O_i,cm}^T I_{O_i} \mathcal{I}_{O_i} + b_{O_i} \quad (1.38)$$

Por definición, el momento espacial en/sobre el centro de masa,  $cm$ , del cuerpo  $i$  está dado por la siguiente expresión,

$$L_{i,cm} \equiv I_{i,cm} V_{i,cm} \quad (1.39)$$

En consecuencia, y empleando las definiciones dadas para el operador de inercia en (1.8) y la velocidad espacial en (1.29) se pueden definir las fuerzas espaciales que actúan sobre el cuerpo - sobre su centro de masa.

$$F_{i,cm} \equiv \mathcal{I}_{i,cm} = I_{i,cm} \mathcal{I}_{i,cm} + \mathcal{I}_{i,cm} V_{i,cm}$$

$$F_{i,cm} = I_{i,cm} \mathcal{I}_{i,cm} + \mathcal{I}_{i,cm} \quad (1.40)$$

Donde, el segundo término corresponde a las fuerzas giroscópicas espaciales actuando sobre el centro de masa del cuerpo  $i$ , que por simplicidad denominaremos  $\wp_{i,cm}$  y se define,

$$\wp_{i,cm} \equiv \mathcal{J}_{i,cm} V_{i,cm} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{i,cm} & 0 \\ 0 & \mathcal{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i,cm} \\ v_{i,cm} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Dado que la masa del cuerpo se asume como constante (es decir, su derivada con respecto a tiempo es cero en cualquier punto del cuerpo) podemos entonces reescribir la ecuación (1.41),

$$\wp_{i,cm} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i,cm} \mathcal{J}_{i,cm} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i,cm} \\ v_{i,cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i,cm} \mathcal{J}_{i,cm} w_{i,cm} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Efecto Rotacional

Habiendo derivado las ecuaciones de movimiento para un cuerpo sobre su centro de masa, es imperativo poder extenderlas para que tengan validez sobre cualquier otro punto del cuerpo en cuestión. El objetivo de esto es poder generalizar las ecuaciones de movimiento para cadenas seriales multicuerpo permitiendo la propagación de parámetros cinemáticos y dinámicos a través de los puntos de interconexión entre sus elementos. Como se ha dicho, las cadenas seriales multicuerpo son consideradas la base primitiva sobre la cual pueden ser evaluadas y simuladas otras estructuras multicuerpo de mayor complejidad. Para este fin se derivan a continuación las ecuaciones de movimiento sobre el punto  $O_i$ .

El primer paso es recordar la ecuación que relaciona las fuerzas entre dos puntos diferentes de un cuerpo, y que fue definida en la ecuación (1.30),

$$F_{O_i} = \hat{S}_{O_i,cm} F_{i,cm}$$

En la ecuación (1.30) se tomaron estos dos puntos,  $cm$  y  $O_i$ , como el centro de masa y un punto arbitrario, respectivamente. Para efectos de claridad se asume a partir de ahora que el punto  $O_i$  corresponde al punto de rotación sobre el cual se mueve el objeto (por ejemplo, los puntos de articulación en un sistema multicuerpo).

A partir de la ecuación (1.40) se pueden representar las fuerzas espaciales actuando sobre el punto  $O_i$  como,

$$F_{O_i} = \hat{S}_{O_i,cm} \left[ I_{i,cm} \mathcal{V}_{i,cm} + \wp_{i,cm} \right] \quad (1.43)$$

Reemplazando (1.38) en (1.43),

$$F_{O_i} = \hat{S}_{O_i,cm} \left[ I_{i,cm} \left[ \hat{S}_{O_i,cm}^T \mathcal{V}_{O_i} + b_{O_i} \right] + \wp_{i,cm} \right]$$

y expandiendo,

$$F_{O_i} = \hat{S}_{O_i,cm} I_{i,cm} \hat{S}_{O_i,cm}^T \mathcal{V}_{O_i} \& + \hat{S}_{O_i,cm} I_{i,cm} b_{O_i} + \hat{S}_{O_i,cm} \mathcal{P}_{i,cm} \quad (1.44)$$

Se obtiene la expresión general para las fuerzas espaciales actuando sobre el punto  $O_i$  de un cuerpo  $i$ . Como se puede ver la expresión es algo compleja y no permite una apropiada interpretación física de lo que representa. A continuación se exponen algunas simplificaciones basadas en expresiones ya definidas que permitirán una mejor abstracción de los fenómenos físicos implicados.

Para comenzar, el primer término en (1.44) se identifica como la fuerza espacial en el punto  $O_i$  - que se obtiene a partir de la aplicación del teorema de ejes paralelos para inercias espaciales y que permite calcular la inercia sobre el punto  $O_i$ ,  $I_{O_i}$ , a partir de  $I_{i,cm}$  del cuerpo  $i$  - y la aceleración espacial del punto  $O_i$ . A partir de esta definición se define el tensor espacial de inercia sobre el punto  $O_i$  de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} I_{O_i} &= \hat{S}_{O_i,cm} I_{i,cm} \hat{S}_{O_i,cm}^T = \begin{bmatrix} U & \mathcal{P}_{O_i,cm} \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{i,cm} & 0 \\ 0 & m_i U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ -\mathcal{P}_{O_i,cm} & U \end{bmatrix} \\ I_{O_i} &= \begin{bmatrix} J_{i,cm} - \mathcal{P}_{O_i,cm} m_i \mathcal{P}_{O_i,cm} & m_i \mathcal{P}_{O_i,cm} \\ -m_i \mathcal{P}_{O_i,cm} & m_i U \end{bmatrix} \\ I_{O_i} &= \begin{bmatrix} J_{O_i} & m_i \mathcal{P}_{O_i,cm} \\ -m_i \mathcal{P}_{O_i,cm} & m_i U \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Donde el tensor de inercia en el punto  $O_i$ ,  $J_{O_i}$ , se define como,

$$J_{O_i} \equiv J_{i,cm} - \mathcal{P}_{O_i,cm} m_i \mathcal{P}_{O_i,cm} \quad (1.46)$$

Obviamente, todas las propiedades del tensor de inercia,  $J$ , se mantienen.

Continuando con la simplificación de la ecuación general de fuerza en (1.44), el segundo y tercer término pueden reconocerse como las fuerzas giroscópicas actuando sobre el punto  $O_i$ ,

$$\mathcal{P}_{O_i} = \hat{S}_{O_i,cm} \left[ I_{i,cm} b_{O_i} + \mathcal{P}_{i,cm} \right] \quad (1.47)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.32) y (1.42), correspondientes a las aceleraciones de Coriolis/Centrífugas medidas en  $O_i$  y las fuerzas giroscópicas en/sobre el centro de masa, respectivamente, en la ecuación anterior,

$$\mathcal{P}_{O_i} \equiv \hat{S}_{O_i,cm} \left[ I_{i,cm} \mathcal{S}_{O_i,cm}^T \mathcal{V}_{O_i} + \mathcal{P}_{i,cm} \mathcal{V}_{i,cm} \right] \quad (1.48)$$

A partir de las ecuaciones en (1.7), se sabe que  $\hat{S}_{O_i,cm}^T \mathcal{E}_{O_i,cm}^T = \mathcal{E}_{O_i,cm}^T = -\mathcal{E}_{cm,O_i}^T$  por lo tanto,

$$\begin{aligned} \wp_{O_i} &= \hat{S}_{O_i,cm} \left[ I_{i,cm} \hat{S}_{O_i,cm}^T \mathcal{E}_{O_i,cm}^T V_{O_i} + \mathcal{E}_{i,cm} V_{i,cm} \right] \\ \wp_{O_i} &= I_{O_i} \mathcal{E}_{O_i,cm}^T V_{O_i} + \hat{S}_{O_i,cm} \mathcal{E}_{i,cm} V_{i,cm} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Reemplazando en (1.49) el valor de  $V_{i,cm}$  encontrado en la ecuación (1.38), se deduce la siguientes expresión para la fuerza giroscópica que actúa en/sobre el punto  $O_i$ ,

$$\wp_{O_i} = I_{O_i} \mathcal{E}_{O_i,cm}^T V_{O_i} + \hat{S}_{O_i,cm} \mathcal{E}_{i,cm} \hat{S}_{O_i,cm}^T V_{O_i} \quad (1.50)$$

$$\wp_{O_i} = I_{O_i} \mathcal{E}_{O_i,cm}^T V_{O_i} + \mathcal{E}_{O_i} V_{O_i} \quad (1.51)$$

o,

$$\wp_{O_i} = -\mathcal{E}_{O_i,cm} I_{O_i} V_{O_i} + \mathcal{E}_{O_i} V_{O_i} \quad (1.52)$$

El resultado anterior describe las fuerza giroscópicas actuando en/sobre el punto  $O_i$ . De manera expandida se reescribe la ecuación (1.8) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \wp_{O_i} &= \begin{bmatrix} J_{O_i} & m_i \mathcal{E}_{O_i,cm} \\ -m_i \mathcal{E}_{O_i,cm} & m_i U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{E}_{O_i} \hat{S}_{O_i,cm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{O_i} \\ v_{O_i} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} U & \mathcal{E}_{O_i,cm} \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{O_i} J_{O_i} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_{O_i} U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ -\mathcal{E}_{O_i,cm} & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{O_i} \\ v_{O_i} \end{bmatrix} \\ \wp_{O_i} &= \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{O_i} \begin{bmatrix} -m_i \mathcal{E}_{O_i,cm} & \mathcal{E}_{O_i,cm} \end{bmatrix} w_{O_i} \\ -m_i \mathcal{E}_{O_i} \mathcal{E}_{O_i} \hat{S}_{O_i,cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{O_i} J_{i,cm} w_{O_i} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{O_i} \begin{bmatrix} J_{i,cm} & -m_i \mathcal{E}_{O_i,cm} \mathcal{E}_{O_i,cm} \end{bmatrix} w_{O_i} \\ -m_i \mathcal{E}_{O_i} \mathcal{E}_{O_i} \mathcal{E}_{O_i,cm} \end{bmatrix} \\ \wp_{O_i} &= \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{O_i} J_{O_i} w_{O_i} \\ m_i \mathcal{E}_{O_i} \mathcal{E}_{O_i} \hat{S}_{O_i,cm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.53)$$

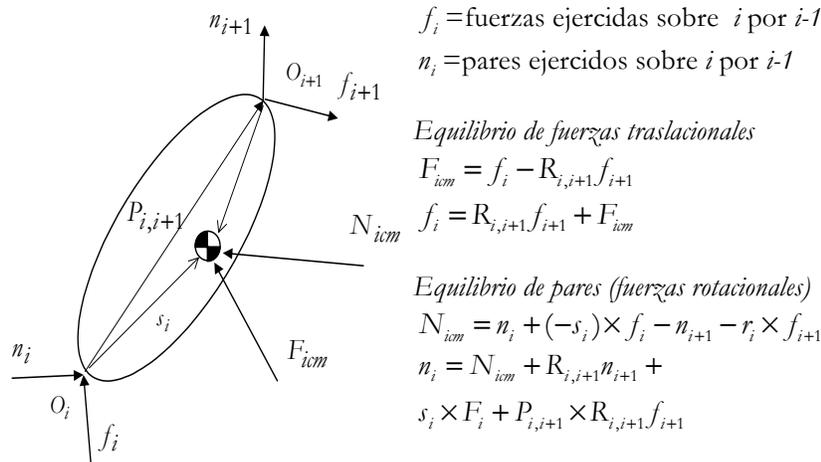


las ecuaciones de movimiento sobre cualquier punto del cuerpo. Por conveniencia sin embargo, se tomará el punto de conexión entre cuerpos vecinos  $O_i$  (por ser los puntos de articulación, ver la Figura 1) como puntos de referencia para la propagación de parámetros cinemáticos y dinámicos.

El procedimiento consiste en la propagación, desde la base hasta el último cuerpo de la cadena, de los parámetros cinemáticos (posiciones, velocidades y aceleraciones espaciales) y luego en la propagación inversa, desde el último cuerpo del sistema hasta la base, de las fuerzas espaciales (considerando el principio de d'Alambert [Goldstein, 1980; Fu, Gonzales, y Lee, 1988]).

### Recordando el principio de d'Alambert (en notación vectorial 3x1)

El principio aplica las condiciones de equilibrio estático en problemas dinámicos considerando que la suma algebraica de las fuerzas aplicadas y las fuerzas de reacción (internas) que actúan sobre un cuerpo en cualquier dirección dada son cero.



### Ecuaciones Cinemáticas

La velocidad espacial de cualquier elemento  $i$  consiste en la suma de contribuciones inducidas por el elemento inmediatamente anterior,  $i-1$ , y su componente netamente local, es decir,

$$V_i = R_{i,i-1}^T \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + H_i \mathcal{Q}_i \quad (1.55)$$

Donde  $H_i$  corresponde a la matriz de proyección sobre los ejes de movimiento de una articulación  $i$ , compuesta de un vector de 6x1 para cada grado de libertad (el subvector superior 3x1 representa el componente rotacional y el subvector inferior el componente traslacional).

Derivando la ecuación (1.55) con respecto a tiempo se obtiene la expresión para la aceleración espacial,

$$\dot{V}_i = R_{i,i-1}^T \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + H_i \otimes + R_{i,i-1}^T \dot{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + I_i \otimes \otimes \quad (1.56)$$

Donde el tercer y cuarto componentes corresponden a los términos dependientes de velocidad, aceleración de Coriolis y aceleración centrífuga, respectivamente, y que se representará de la siguiente forma,

$$b_i = R_{i,i-1}^T \dot{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + I_i \otimes \otimes \quad (1.57)$$

Este término (independiente de sistemas coordenados) es equivalente a,

$$\begin{aligned} b_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dot{m}_{0,i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{m}_{0,i} & 0 \\ 0 & \dot{m}_{0,i} \end{bmatrix} H_i \otimes \otimes \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dot{m}_{0,i} & \dot{m}_{0,i} w_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{m}_{0,i} & 0 \\ 0 & \dot{m}_{0,i} \end{bmatrix} H_i \otimes \otimes \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{m}_{0,i} [v_i - v_{i-1}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{m}_{0,i} & 0 \\ 0 & \dot{m}_{0,i} \end{bmatrix} H_i \otimes \otimes \end{aligned} \quad (1.58)$$

La expresión general para la velocidad y la aceleración espacial de un elemento se representa entonces como una recursión desde  $i$  hasta  $n$ , donde las condiciones iniciales están dadas por  $V_1 = H_1 \otimes \otimes$  y  $\dot{V}_1 = H_1 \otimes \otimes + I_1 \otimes \otimes$  (para sistemas de base fija).

Para completar el sistema de ecuaciones se procede a calcular el conjunto de fuerzas a partir de los parámetros cinemáticos ya calculados, regresando en la cadena recursivamente - desde  $n$  hasta  $1$ .

$$F_i = \hat{P}_{i,i+1} R_{i+1,i} F_{i+1} + I_i \dot{V}_i + \mathcal{O}_i \quad (1.59)$$

Empleando la ecuación (1.52) se escribe,

$$F_i = \hat{P}_{i,i+1} R_{i+1,i} F_{i+1} + I_i \dot{V}_i + \dot{P}_{i,i+1} V_{i+1} - I_i S_{O_i,cm}^T V_i \quad (1.60)$$

## REVISAR SIGNO ULTIMO TÉRMINO

Donde los dos últimos términos corresponden a las fuerzas girsocópicas introducidas por la velocidad espacial al desplazar el punto de rotación de un cuerpo lejos de su centro de masa.

Finalmente, las fuerzas efectivas se hallan a partir de la proyección de las fuerzas totales sobre los ejes de movimiento,

$$F_{Ti} = H_i^T F_i \quad (1.61)$$

De nuevo, la matriz  $H$  describe los ejes de movimiento permitidos.

## El Sistema Completo de Ecuaciones de Movimiento para Cadenas Multicuerpo

La integración de los dos pasos anteriores - propagación de aceleraciones hacia “arriba en la cadena y la propagación posterior de las fuerzas resultantes hacia “abajo” en la cadena - con todos los términos proyectados apropiadamente sobre sus sistemas de coordenadas locales conlleva a las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler para cadenas multicuerpo seriales.

---

### Paso 1. Propagar aceleraciones desde la base al último cuerpo de la cadena

$V_0 = 0$  Asumir base fija

$\mathcal{V}_0 = 0$  Bajo campo gravitacional =  $(gx, gy, gz)^T$  para  $g=9.81$

for  $i = 1..n$

$$V_i = R_{i,i-1}^T \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + H_i \mathcal{L}_i$$

Velocidades espaciales

$$\mathcal{V}_i = R_{i,i-1}^T \hat{P}_{i-1,i}^T \mathcal{V}_{i-1} + H_i \mathcal{L}_i + R_{i,i-1}^T \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + I_i \mathcal{L}_i$$

Aceleraciones espaciales

end

### Paso 2. Propagar las fuerzas espaciales hasta la base del sistema multicuerpo

$F_{n+1} = 0$  No hay fuerzas externas actuando sobre el último cuerpo

for  $i = n..1$

$$F_i = \hat{P}_{i,i+1} R_{i+1,i} F_{i+1} + I_i \mathcal{V}_i + \left[ \mathcal{F}_i - I_i \mathcal{O}_{i,cm}^T \right] V_i \quad \text{Fuerzas espaciales}$$

$$F_{Ti} = H_i^T F_i \quad \text{Fuerzas efectivas}$$

end

---

Figura 7 Ecuaciones de movimiento de Newton euler para cadenas multicuerpo en notacion espacial

### Interpretación física de las ecuaciones en la Figura 7

*Paso 1.* En cada punto de intersección entre dos cuerpos adyacentes (usualmente el centro geométrico de rotación/traslación articular), las velocidades espaciales inter-cuerpos se determinan calculando la diferencia entre la componente local y la componente aportada por las velocidades acumuladas e inducidas por el sistema de cuerpos inmediatamente anteriores. Esto se logra propagando (usando los operadores espaciales  $P^T$ ) y orientando (con los operadores  $R^T$ ) las velocidades espaciales acumuladas sobre los sistemas de coordenadas locales al  $i$  calculado. Es importante anotar que los sistemas de coordenadas están ligados a cada cuerpo en su extremo posterior. Este proceso se repite para cada cuerpo  $i$ , y luego se procede a calcular las aceleraciones espaciales de la forma descrita por la ecuaciones descritas anteriormente.

Paso 2. Comenzando desde el último cuerpo de la cadena, se propagan (*empleando los operadores espaciales P*) y orientan (*empleando los operadores espaciales R*) las fuerzas espaciales que actúan sobre cada cuerpo con el fin de calcular el componente de fuerzas inter-cuerpos en cada punto articular. Finalmente se proyectan las fuerzas resultantes sobre cada uno de los ejes de movimiento permitidos usando la matriz de proyección  $H$ .

El proceso de propagar y proyectar permite referenciar todas las cantidades físicas con respecto a un solo sistema de coordenadas común, con el fin de ser operadas para determinar el componente que define la resultante compartida entre cuerpos adyacentes acoplados.

Habiendo derivado la solución para el problema dinámico inverso, se mira ahora el problema dual de encontrar una solución para la dinámica directa. En otras palabras, encontrar a partir de un conjunto de fuerzas efectivas el conjunto de aceleraciones efectivas correspondientes y por un proceso de integración las velocidades y posiciones que definen la trayectoria inducida por la aplicación de dichas fuerzas.

Utilizando operadores espaciales de un nivel más alto se reescriben las ecuaciones en Figura 7 de la siguiente manera,

$$V_i - \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} = H_i \mathcal{Q}_i \Rightarrow P^T V = H \mathcal{Q} \quad (1.62)$$

$$V_i = \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + H_i \mathcal{Q}_i + b_i \Rightarrow P^T \mathcal{V} = H \mathcal{Q} + B \quad (1.63)$$

$$F_i = \hat{P}_{i,i+1} F_{i+1} + I_i V_i + \phi_i \Rightarrow PF = IV + G \quad (1.64)$$

$$F_T = H_i^T F_i \Rightarrow F_T = H^T F \quad (1.65)$$

Donde,  $P$  es una matriz de bloque bidiagonal inferior,

$$P = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\hat{P}_{N-1} & U & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\hat{P}_{N-2} & U & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{P}_1 & U \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6n \times 6n}$$

con traspuesta dada por,

$$P^T = \begin{bmatrix} U & -\hat{P}_{N-1}^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U & -\hat{P}_{N-2}^T & \dots & 0 \\ 0 & 0 & U & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\hat{P}_1^T \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6n \times 6n}$$

Los componentes diagonales inferior y superior corresponden a los operadores espaciales de traslación  $\in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$  compuestos de las matrices antisimétricas que representan la distancia entre orígenes articulares del sistema de multicuerpos, y los términos diagonales matrices de identidad  $\in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ .

$$\begin{aligned} V &= \text{diag}\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times n} \\ \mathfrak{V} &= \text{diag}\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times n} \\ \mathfrak{Q} &= \text{diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times n} \\ H &= \text{diag}\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times n_{\text{dof}} n} \\ B &= \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times n} \\ G &= \text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times n} \end{aligned}$$

El siguiente paso es el de expresar el operador desconocido,  $\mathfrak{Q}$ , en términos de las variables conocidas  $Q, \mathfrak{Q}, V, F, F_T$ ,

$$V = \rho^T H \mathfrak{Q} \quad (1.66)$$

$$\mathfrak{V} = \rho^T (H \mathfrak{Q} + B) \quad (1.67)$$

$$F = \rho (V + G) \quad (1.68)$$

$$F_T = H^T F \quad (1.69)$$

En la cual se introduce,

$$\rho = P^{-1} = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{P}_{n,n-1} & U & 0 & \dots & 0 \\ \hat{P}_{n,n-2} & \hat{P}_{n-1,n-2} & U & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{P}_{n,1} & \hat{P}_{n-1,1} & L & \hat{P}_{2,1} & U \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6n \times 6n}$$

Dado que el objetivo es expresar las aceleraciones efectivas a partir de las fuerzas efectivas, se representa este último operador como se indica a continuación, a partir de (1.67) y (1.68),

$$F = \rho(I \rho^T (H \ddot{Q} + B) + G)$$

Expandiendo,

$$F = \rho I \rho^T H \ddot{Q} + \rho I \rho^T B + \rho G$$

Proyectando las fuerzas sobre los ejes de movimiento de cada cuerpo, usando la ecuación (1.69) se despejan las aceleraciones efectivas,

$$F_T = H^T \rho I \rho^T H \ddot{Q} + H^T \rho I \rho^T B + H^T \rho G$$

Agrupando términos ( $\ddot{Q}$ ),

$$F_T = [H^T \rho I \rho^T H] \ddot{Q} + [H^T \rho I \rho^T B + H^T \rho G] \quad (1.70)$$

A partir de la ecuación anterior se deducen dos términos importantes (entre paréntesis), el primero equivale a la expresión del operador de matriz de masa,  $M$ , y el segundo equivale al conjunto de términos no-lineales de fuerza introducidos por los componentes de velocidad,  $\xi$ , es decir,

$$M = H^T \rho I \rho^T H \quad (1.71)$$

y,

$$\xi = H^T \rho [I \rho^T B + G] \quad (1.72)$$

De forma simplificada se expresan entonces las ecuaciones de movimiento de la siguiente manera,

$$F_T = M \ddot{Q} + \xi \quad (1.73)$$

Consecuentemente las aceleraciones efectivas del conjunto de cuerpos corresponden a,

$$\ddot{Q} = M^{-1} [F_T - \xi] \quad (1.74)$$

Que representa el conjunto de ecuaciones de movimiento de sistemas acelerados multicuerpo acoplados serialmente.

La ecuación (1.74) realmente no dice mucho acerca de la estructura de la ecuación (1.71). Este término es de interés particular ya que a partir de su inversa se determina la solución del problema dinámico directo expresado por la ecuación (1.74).

El proceso de inversión de una matriz cuadrada implica un costo computacional de  $O(n^3)$ , pero como se mencionó anteriormente las características estructurales de la matriz de masa a generado un buen número de mejoras en el proceso de su inversión que a su vez conllevan al cálculo de las ecuaciones de movimiento.

## El Problema Dinámico Directo

### Motivación

*El propósito de este capítulo es el de introducir los conceptos fundamentales del algoritmo de  $O(n)$  serial propuesto para resolver las ecuaciones de movimiento de sistemas multicuerpo empleando un esquema alternativo de descomposición de fuerzas que conlleva a la solución en forma directa del operador inverso de la matriz de masa del sistema. La ventaja grande de esta nueva formulación para sistemas multicuerpo radica en su escalabilidad para implementaciones estrictamente paralelas.*

### Fundamentos

Como fue mencionado en el primer capítulo, la introducción de restricciones sobre los enlaces atómicos permite incrementar las escalas de tiempos para la integración de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, estos incrementos son relativamente pequeños y para lograr aumentarlos aún más se propone particionar las estructuras multicuerpo en subconjuntos de átomos que puedan ser considerados como cuerpos rígidos.

Este capítulo discute un novedoso método de  $O(n)$  para el cálculo de las ecuaciones de movimiento de cadenas de cuerpos rígidos. El método propuesto hace uso explícito de las fuerzas de restricción entre los cuerpos con el fin de derivar una factorización directa y única de la matriz inversa de masa en forma del *Complemento de Schur*. Se demostrará como la estructura de este operador conlleva a una solución al problema dinámico directo en un orden de complejidad  $O(\log_2 N)$  para implementaciones estrictamente paralelas.

Dejando que,

$$I \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6n \times 6n}$$

sea una matriz particionada y A un bloque no singular.

El *Complemento de Schur*  $[I/A]$  del bloque A en I se define como la matriz  $[I/A] = C - B^T A^{-1} B$ . I no tiene que ser necesariamente cuadrada.

Para una mejor comprensión de las ventajas en la estructura del complemento de *schur* se recomienda [Fiedler, 1986]. Para el propósito específico de este desarrollo es suficiente saber que A es altamente diagonal para casos particulares (cuadrada para cadenas seriales con articulaciones sencillas), lo cual reduce el costo de calcular la matriz inversa de masa.

Un cuerpo rígido, o en general cualquier punto de masa puede ser limitado a moverse sobre superficies o curvas particulares conocidas como restricciones. Estas restricciones pueden ser reemplazadas por fuerzas que mantienen el cuerpo o la partícula dentro de las trayectorias definidas por los movimientos sin restricción, pero no contribuyen en trabajo (en la práctica estas fuerzas son las causantes del desgaste) dado que los cuerpos o partículas siempre se mueven en ángulo recto a las restricciones [Menzel, 1960].

Las leyes de movimiento para una partícula bajo la influencia combinada de una fuerza interna,  $f_T$ , y otra de restricción  $f_S$  está dada por  $f_T + f_S = ma$ , si la partícula está restringida a moverse sobre una superficie. Expandiendo esta estrategia de descomposición de fuerzas podemos decir que la fuerza total que actúa sobre cualquier cuerpo (o partícula) restringido puede definirse de la siguiente manera,

$$f = f_T + f_S \quad (1.75)$$

Empleando esta descomposición se reformularán las ecuaciones de movimiento para sistemas de cuerpos rígidos interconectados serialmente (que por definición incluyen restricciones perpendiculares al movimiento permitido por cada articulación en sus puntos de interconexión). De la misma manera, empleando el modelo primitivo para cadenas seriales se deducirán las extensiones para topologías de interconexión de mayor complejidad.

### Formalización

Un cuerpo rígido acelerado puede contener términos no lineales de fuerza dependientes de las velocidades. Esto influye en el computo de ambos problemas de dinámica. Para la solución al problema directo es necesario remover estos términos no-lineales de las ecuaciones de movimiento dado

que no contribuyen directamente sobre la aceleración espacial del sistema. Matemáticamente, esto se expresa de la siguiente manera,

$$\ddot{Q} = M^{-1} [F_T - \xi] \quad (1.76)$$

Donde,  $\xi$  corresponde precisamente a los términos mencionados, y  $F_T$  a las fuerzas efectivas totales. Normalmente,  $\xi$  se calcula con la aplicación de un método para la solución al problema dinámico inverso (Newton-Euler con aceleraciones efectivas nulas por ejemplo).

$$F_{T_{rebidad}} = M \ddot{Q} + \xi \quad (1.77)$$

$$F_{T_{rebidad}} = \xi$$

La ecuación (1.76) es el punto obligado de comienzo para cualquier solución al problema dinámico directo. Ningún algoritmo que pretenda calcular las ecuaciones de movimiento de sistemas multicuerpo puede considerarse completo sin la eliminación explícita de  $\xi$ .

También es posible explicar lo anterior con un modelo de energías basado en la formulación Lagrangiana. Definiendo las fuerzas activas como,

$$F_T = D(Q)[\dot{Q} + k_v \dot{Q} + k_p e] + b(Q, \dot{Q}) + G(Q) + H^T(Q)F_{ext} \quad (1.78)$$

Donde,

$k_v \dot{Q}$ : Velocidad

$k_p e$ : Posición

$b(Q, \dot{Q})$ : Aceleración de Coriolis y Centrifuga

$G(Q)$ : Fuerzas Gravitacionales

O en notación global,

$$F_T = D(Q)\ddot{Q} + \boxed{b(Q, \dot{Q}) + G(Q) + H^T(Q)F_{ext}} \quad (1.79)$$

$$F_T = D(Q)\ddot{Q} + C(Q, \dot{Q})$$

Donde  $C$  incluye todos los términos dependientes de velocidad y posición (enmarcados en la ecuación (1.79)) que deben ser removidos para dejar únicamente aquellos términos dependientes de aceleración que afectan el componente de fuerza.

Con  $D=0$  (o  $\ddot{Q}=0$ ) se obtiene el vector de fuerza bias,

$$F_b = C(Q, \dot{Q}) \quad (1.80)$$

Que incluye los efectos de Coriolis, Centrifuga, aceleración gravitacional, etc.

Calculando  $F_T - F_b = D(Q)\mathcal{G}$  recobramos  $D$ .

Recordando las ecuaciones de movimiento desarrolladas en la sección anterior para sistemas multicuerpo seriales,

$$V_i = \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} - H_i \mathcal{G}_i \Rightarrow P^T V = H \mathcal{G} \quad (1.81)$$

$$V_i = \hat{P}_{i-1,i}^T V_{i-1} + H_i \mathcal{G}_i + b_i \Rightarrow P^T \mathcal{V} = H \mathcal{G} + B \quad (1.82)$$

$$F_i = \hat{P}_{i,i+1} F_{i+1} + I_i V_i + \phi_i \Rightarrow PF = IV + G \quad (1.83)$$

Es posible deducir de manera sencilla que al eliminar todos los componentes dependientes de velocidad ( $V_i, \mathcal{G}_i, b_i, \phi_i$ ) se obtienen las siguiente ecuaciones generalizadas para cualquier  $i$ ,

$$V_i = \hat{P}_{i-1}^T V_{i-1} + H_i \mathcal{G}_i \quad (1.84)$$

$$F_i = \hat{P}_i F_{i+1} + I_i V_i \quad (1.85)$$

O de forma global,

$$P^T \mathcal{V} = H \mathcal{G} \quad (1.86)$$

$$PF = IV \quad (1.87)$$

Con las ecuaciones anteriores pueden encontrarse las aceleraciones efectivas del sistema, empleando los métodos descritos en los capítulos 3 y 4.

La ecuación (1.75) se generaliza en el espacio 6-dimensional empleando una matriz de proyección de ejes de movimiento, definida aquí como  $H$ , y una matriz de ejes de restricción de movimiento, definida aquí como  $W$ , de la siguiente manera,

$$F = HF_T + WF_S \quad (1.88)$$

Donde,

$F_T = \text{column}\{F_{T_i}\} \in \mathfrak{R}^{6N \times n_{df}}$ : Vector global de fuerzas activas.

$F_S = \text{column}\{F_{S_i}\} \in \mathfrak{R}^{6N \times n_{dc}}$ : Vector global de fuerzas de restricción.

$H = \text{diag}\{H_1, H_2 \dots H_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times n_{df}}$ : Matriz de proyección de componentes activos sobre ejes de movimiento.

$W = \text{diag}\{W_1, W_2, \dots, W_n\} \in \mathfrak{R}^{6n \times 6n}$  Matriz de proyección de componentes de fuerza sobre ejes de restricción.

Empleando las ecuaciones (1.86) y (1.87) conjuntamente con la expresión anterior de fuerza, se derivará a continuación la base del algoritmo de restricciones presentado originalmente en [Sharf y d'Eleuterio, 1993; Fijany, Sharf y d'Eleuterio, 1995] para dinámica de robots, para luego presentar una nueva propuesta que considera el mismo esquema de descomposición de fuerzas en (1.88) para la solución al problema dinámico directo de sistemas multicuerpo flotantes de alta envergadura. El resultado, como veremos, puede ser llevado fácilmente de nuevo al área de Robótica para su aplicación en modelamiento y simulación de manipuladores espaciales. Igualmente, se presentan extensiones que habilitarán nuevos trabajos en Robótica, específicamente para modelamiento y simulación de topologías complejas.

H y W representan espacios de proyección ortogonales, y cumplen las siguientes condiciones de ortogonalidad,

$$\begin{aligned} H^T H &= U, W^T W = U, \\ W^T H &= 0, H^T W = 0, \\ HH^T + WW^T &= U \end{aligned} \quad (1.89)$$

Procedemos entonces, primero a despejar las aceleraciones espaciales a partir de la ecuación de fuerza en (1.87),

$$\mathfrak{A} = I^{-1} P F \quad (1.90)$$

Reemplazando  $\mathfrak{A}$  en la ecuación de aceleraciones espaciales (1.86),

$$H \mathfrak{A} = P^T I^{-1} P F \quad (1.91)$$

Y a partir de la ecuación de descomposición de fuerzas en (1.88),

$$H \mathfrak{A} = P^T I^{-1} P (H F_T + W F_S) \quad (1.92)$$

Como se ha mencionado antes, a pesar de que esta solución emplea el componente de fuerza de restricción que no tiene incidencia sobre el movimiento acelerado del sistema de cuerpos, este servirá para reformular las ecuaciones de movimiento. De hecho, los componentes restrictivos de fuerza se hallarán en función de los activos para resolver el conjunto de aceleraciones efectivas a partir la factorización directa de la matriz inversa de masa resultante.

Utilizando las condiciones de ortogonalidad en (1.89) se procede a determinar  $F_S = f(F_T)$ . Pre-multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por  $W^T$  se elimina el componente de aceleración dejando solo aquellos directamente dependientes de fuerza,

$$\begin{aligned} \cancel{W^T H} &= W^T P^T I^{-1} P (H F_T + W F_S) \\ W^T P^T I^{-1} P H F_T + W^T P^T I^{-1} P W F_S &= 0 \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$F_S = -(W^T P^T I^{-1} P W)^{-1} W^T P^T I^{-1} P H F_T \quad (1.94)$$

O de forma global,

$$B F_T + A F_S = 0 \quad (1.95)$$

$$F_S = -A^{-1} B F_T \quad (1.96)$$

Donde,  $A = W^T P^T I^{-1} P W \in \mathfrak{R}^{n_{doc} N \times n_{doc} N}$ , y  $B = W^T P^T I^{-1} P H \in \mathfrak{R}^{n_{doc} N \times n_{doj} N}$ . Para sistemas con articulaciones sencillas (1 DOF), ambos A y B son matrices tridiagonales de bloque, donde  $n_{doj} + n_{doc} = 6$ ,  $n_{doj} = DOF$ , y  $n_{doc} = DOC$  (Grados de restricción). Más aún, A es definida simétrica positiva (SPD: *Symmetric Positive Definite*). Esto garantiza la existencia de  $A^{-1}$  y la del operador inverso de masa.

Igualmente, multiplicando la ecuación (1.92) por  $H^T$  y empleando de nuevo las condiciones de ortogonalidad definidas se determina la expresión para las aceleraciones efectivas en función de las fuerzas (de restricción y activas), es decir,

$$H^T P^T I^{-1} P H F_T + H^T P^T I^{-1} P W F_S = \cancel{0} \quad (1.97)$$

Intuitivamente, sabemos que el signo negativo del componente de fuerzas de restricción viene del hecho de que son fuerzas que se oponen a las fuerzas activas que inducen el movimiento de un cuerpo. Habiendo encontrado dicho componente, debemos eliminarlo del componente total de fuerzas ya que como se ha dicho no contribuye al movimiento. Reemplazando la expresión encontrada para las fuerzas de restricción en (1.96) se tiene entonces,

$$H^T P^T I^{-1} P H F_T - H^T P^T I^{-1} P W (A^{-1} B F_T) = \cancel{0} \quad (1.98)$$

$$\left[ H^T P^T I^{-1} P H - H^T P^T I^{-1} P W (W^T P^T I^{-1} P W)^{-1} W^T P^T I^{-1} P H \right] F_T = \cancel{0} \quad (1.99)$$

Que en notación global pueden expresarse de la siguiente forma, respectivamente,

$$C F_T + B^T F_S = \cancel{0} \quad (1.100)$$

$$\cancel{0} = [C - B^T A^{-1} B] F_T \quad (1.101)$$

Donde,  $C = H^T P^T I^{-1} P H \in \mathfrak{R}^{n_{df} \times n_{df}}$ .

Claramente, los términos entre paréntesis equivalen a la matriz inversa de masa,

$$M^{-1} = C - B^T A^{-1} B \quad (1.102)$$

$$M^{-1} = H^T P^T I^{-1} P H - H^T P^T I^{-1} P W (W^T P^T I^{-1} P W)^{-1} W^T P^T I^{-1} P H \quad (1.103)$$

La expresión para la matriz inversa de masa en (1.102) corresponde a una forma en *complemento de schur* del bloque A en M.

### Macro Algoritmo

Se presenta a continuación el macro-algoritmo completo para el cálculo de la ecuación (1.101) con sus correspondientes complejidades seriales,

Paso		Complejidad Serial
1	$F_T = F(Q) - b(Q, \mathcal{F}_{ext})$ (requiere la aplicación de la solución al problema dinámico inverso)	$O(n)$
2	$\mathcal{Q} = C F_T$	$O(n)$
3	$S = -B F_T$	$O(n)$
4	$F_S = A^{-1} S$	$O(n)$
5	$\mathcal{Q}^2 = -B^T F_S$	$O(n)$
6	$\mathcal{Q} = \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^2$	$O(n)$
7	Integración numérica	$O(n)$

Figura 8 Macro-Algoritmo de restricción de fuerzas para la solución de las ecuaciones de movimiento de sistemas multicuerpo

## Algoritmos

Se presenta a continuación el conjunto de funciones que cubren las soluciones algorítmicas a los diversos problemas propios de la dinámica de manipuladores. Se emplea el símbolo “←” como operador de asignación y se retorna de la función la última variable definida.

## Referencias