Fundamentos Matemáticos Útiles en Robótica de Manipuladores

Tabla de Contenido

Lista de Ejemplos

Lista de Ejercicios

Lista de Figuras

ÁGEBRA DE VECTORES Y MATRICES

Introducción

En el modelado de un sistema físico, incluyendo los robots manipuladores, es necesario emplear herramientas matemáticas para expresar y manipular cantidades que representen el estado o comportamiento real del mismo. Para describir dichos modelos en un lenguaje matemático útil se requiere del uso de una notación compacta que favorezca la interpretación de los fenómenos físicos involucrados. De ello, se deriva la necesidad de representar cantidades en forma de arreglos ordenados de valores y de utilizar un algebra apropiada para operar sobre los mismos. Así mismo, de la necesidad de poder describir el estado de un sistema geométricamente cambiante se recurre a los elementos de la trigonometría espacial.

La representación numérica de valores físicos requiere del uso de *escalares* (magnitudes caracterizadas sólo por su valor y su unidad de medida) y *vectores* (caracterizados por un valor numérico, dirección y unidad de medida). Las dimensiones de longitud, el peso y el tiempo son ejemplos de escalares, así como, la fuerza, el momento, la velocidad, y la aceleración son ejemplos de vectores. Los escalares son comparables entre sí, si tienen las mismas unidades, mientras los vectores sólo son comparables sólo si representan un entidad física semejante y si tienen las mismas dimensiones.

En esta sección se presentan los conceptos matemáticos fundamentales del álgebra de vectores y matrices así como de trigonometría analítica, necesarios para la solución de problemas asociados con sistemas robóticos manipuladores.

Por convención, los vectores se representan con letras itálicas minúsculas y las matrices en letras mayúsculas (incluyendo operadores vectoriales de bloque).

La magnitud de un vector

La magnitud de un vector 3x3 está dada por,

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ . \tag{0.1}$$

Ejemplo 1 Magnitud de un vector

$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$

$|v_1| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} = 5.3852$

fin Ejemplo 1

Dirección unitaria de un vector

Cualquier vector en el espacio tridimensional puede ser normalizado a un vector unitario con la misma dirección,

$$e_v = \frac{v}{|v|} = \begin{bmatrix} v_x/|v| \\ v_y/|v| \\ v_z/|v| \end{bmatrix} \tag{0.2}$$

Ejemplo 2 Normalización de un vector

$$e_{v_1} = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{bmatrix} 2/5.3852 \\ 3/5.3852 \\ 4/5.3852 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3714 \\ 0.5571 \\ 0.7428 \end{bmatrix}$$

$$|e_{v_1}| = 1$$

fin Ejemplo 2

Algebra de vectores

Suma de vectores

$$v_3 = v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} v_{1x} + v_{2x} \\ v_{1y} + v_{2y} \\ v_{1z} + v_{2z} \end{bmatrix} \tag{0.3}$$

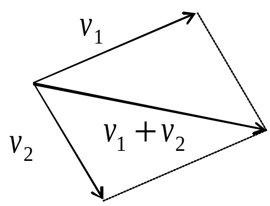


Figura 1 Suma de vectores

Ejemplo 3 Suma de vectores

Si $v_2 = [5 \quad 6 \quad 7]^T$

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 2+5 \\ 3+6 \\ 4+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$|v_1 + v_2| = \sqrt{251} = 15.8430$$

fin Ejemplo 3

Diferencia entre vectores

$$v_3 = v_1 - v_2 = \begin{bmatrix} v_{1x} - v_{2x} \\ v_{1y} - v_{2y} \\ v_{1z} - v_{2z} \end{bmatrix} \quad (0.4)$$

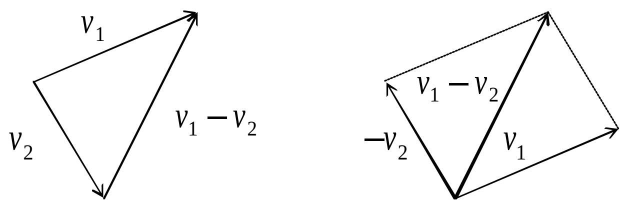


Figura 2 Resta de vectores

La diferencia entre vectores (ver Figura 2) se define como el vector que va desde el final del vector v_2 hasta el final del vector v_1 o cambiando el signo (la dirección) del vector v_2 y ejecutando una suma de vectores sobre v_1.

La suma de vectores son conmutativas, es decir $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$. La suma de tres o más vectores es asociativa, es decir $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + v_3$.

Ejemplo 4 Resta de vectores

$$v_1 - v_2 = \begin{bmatrix} 2-5 \\ 3-6 \\ 4-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|v_1 - v_2| = \sqrt{27} = 5.1962$$

fin Ejemplo 4

Multiplicación por escalares

La multiplicación de un vector v_1 por un escalar c altera su longitud, manteniendo la misma dirección para c>0 y cambiando su dirección en 180 grados para c<0. Se cumple $|cv_1| = c\,|v_1|$. La multiplicación por escalares cumple las propiedades asociativa y distributiva.

Ejemplo 5 Multiplicación de un vector por un escalar

$$5v_1 = 5\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\left|5v_1\right| = \sqrt{725} = 26.9258$$

$$\left|5v_1\right| = 5\left|v_1\right|$$

fin Ejemplo 5

Transformaciones Lineales y Espacios Vectoriales

El espacio tridimensional físico es un caso particular de un *espacio vectorial*. Un espacio vectorial es un conjunto de objetos, denominados vectores, que se ajustan a las siguientes reglas para un espacio vectorial V:

1. La suma de cualquier par de vectores en V, es también un elemento de V y es conmutativa.
2. V contiene un elemento 0, denominado el vector cero de V, que al ser adicionado a cualquier vector de V no lo altera.
3. La suma de vectores en V es asociativa.
4. Para cada elemento de V existe un elemento correspondiente en otro vector también de V que cuando sumado al primero produce el vector cero, es decir, $a + b = 0$ donde $b = -a$.
5. El producto αa, o $a\alpha$, es también un elemento de V, para cada a de V y para cada real de α.
6. Si α es la unidad real, entonces αa es idéntico a a;.
7. El producto definido vectorial es distributivo.

Una transformación lineal, representada por el operador L, de un espacio vectorial V sobre un espacio vectorial U, es una regla que asigna a cada elemento de v en V al menos un vector de u de U. Es decir, $u = Lv$, donde L cumple las propiedades de:

1. *Homogeneidad:* $L(\alpha v) = \alpha u$
2. *Aditividad:* $L(v_1 + v_2) = u_1 + u_2$

En el contexto de la robótica se encuentran con frecuencia las transformaciones lineales *proyecciones, rotaciones y reflexiones* sobre el espacio Euclidiano tridimensional. [Angeles].

Dependencia e Independencia Lineal

Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es *linealmente dependiente* si y sólo si existen n escalares $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ tales que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0 \tag{0.5}$$

Si la única manera de cumplir la ecuación anterior es que todos los escalares c_i sean cero, entonces se dice que el conjunto de vectores es *linealmente indepependiente.*

Dos vectores linealmente dependientes en un mismo espacio tridimensional se encuentran en la misma línea y por ende se denominan *colineales.* Tres vectores linealmente dependientes en un mismo espacio tridimensional se encuentran en el mismo plano y por ende se denominan *coplanares.*

Si existe un subconjunto de vectores $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ del mismo espacio vectorial y un conjunto de escalares $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ tal que cada vector v se pueda expresar como

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i s_i \tag{0.6}$$

Se dice entonces que v es una *combinación lineal* de los vectores $\{s_i\}$.

La dimensión de un espacio vectorial es un número de vectores linealmente independientes cualquiera que genera el espacio vectorial.

Sistemas de Coordenadas

Cualquier vector v en un espacio vectorial de n dimensiones se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de base dados. Por ejemplo, para una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$,

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n \tag{0.7}$$

Para un sistema de tres dimensiones, cualquier conjunto de tres vectores no coplanares puede servir de base.

Si un conjunto de vectores base $\{e_1, e_2, e_3\}$ se escoge para formar ángulos rectos en sus direcciones a partir de un origen común (O), se tiene entonces un sistema de coordenadas cartesiano o rectangular. Si, además, todos los vectores de la base tienen un módulo unitario, el sistema se denomina *ortonormal* y se utiliza la notación $\{i, j, k\}$ para sus vectores de base.

Si los vectores de la base de un sistema de coordenadas ortonormal se toman coincidentes a los ejes principales y un giro de 90^0 respecto del eje O*z* (regla de la mano derecha) lleva a O*x* sobre O*y*, el sistema de coordenadas se denomina como *dextrógiro*. Si un giro de -90^0 sobre el mismo eje lleva O*x* sobre O*y*, el sistema de coordenadas se denomina como *levógiro*. Este libro utiliza, por convención, sistemas de coordenadas dextrógiro.

> *La regla de los tres dedos (mano derecha):*
>
> *El dedo pulgar apunta en la dirección positiva de x, el dedo índice apunta en la dirección positiva de y,* y *el dedo central apunta en la dirección positiva de z.*

> *La regla de la mano derecha:*
>
> *La dirección de un vector puede encontrarse enrollando los dedos de la mano derecha alrededor del eje hipotético y en forma perpendicular al plano formado por los dos ejes conocidos de tal manera que el vector asociado con el eje x rote sobre el eje asociado con el eje y. El dedo pulgar define la dirección del nuevo vector.*

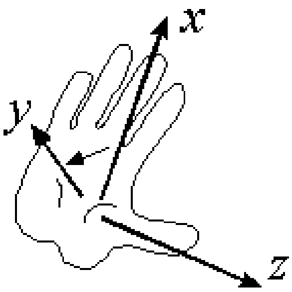


Figura 3 Regla de la mano derecha para sistemas cartesianos

Producto punto (escalar) de dos vectores

El producto punto de dos vectores, v_1 y v_2, resulta en un escalar y se define por,

$$
\begin{aligned}
v_1 \cdot v_2 &= |v_1||v_2|\cos f \\
v_1 \cdot v_2 &= v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}
\end{aligned}
\tag{0.8}
$$

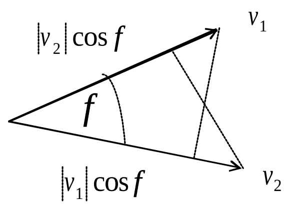


Figura 4 Producto punto entre vectores

Donde f es el ángulo formado por los dos vectores (ver Figura 4).

El producto punto es conmutativo $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$. Esto se deduce de la Figura 4 y las proyecciones de un eje sobre el otro.

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| \cdot |v_2| \cos f = |v_1| \cdot v_{2\,proy} = |v_2| \cdot |v_1| \cos f = |v_2| \cdot v_{1\,proy} \tag{0.9}$$

Si el producto escalar es cero, uno de los dos vectores (o ambos) es cero o los dos vectores son ortogonales (perpendiculares entre si) porque $\cos\left(\pm 90^0\right) = 0$. Como consecuencia de lo anterior, la división por un vector no es permitida.

El producto escalar es distributivo respecto de la suma,

$$\begin{aligned} v_1\left(v_2 + v_3\right) &= v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_3 \\ \left(v_2 + v_3\right) v_1 &= v_2 \cdot v_1 + v_3 \cdot v_1 \end{aligned} \tag{0.10}$$

El producto escalar de tres vectores, $\left(v_1 \cdot v_2\right) v_3$, es el producto de un escalar $\left(v_1 \cdot v_2\right)$ y un vector v_3 que tiene como módulo $|v_1 \cdot v_2||v_3|$ y dirección igual a la del vector v_3 (o la opuesta si $v_1 \cdot v_2 < 0$).

Ejemplo 6 Producto Escalar de Vectores

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = 56$$

El ángulo, f, entre los vectores v_1 y v_2 corresponde a,

$$f = \cos^{-1}\left(\frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{56}{56{,}4805}\right) = 0.1305$$

fin Ejemplo 6

Producto vectorial (cruz) de dos vectores

Se define como el vector

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} v_{1y} \cdot v_{2z} - v_{1z} \cdot v_{2y} \\ v_{1z} \cdot v_{2x} - v_{1x} \cdot v_{2z} \\ v_{1x} \cdot v_{2y} - v_{1y} \cdot v_{2x} \end{bmatrix}, \qquad (0.11)$$

Donde v_3 es ortogonal al plano generado por v_1 y v_2 y tiene módulo $|v_3| = |v_1| \cdot |v_2| sen f$, siendo f el ángulo entre los vectores v_1 y v_2 (ver Figura 5). De la misma figura se deduce que el módulo del producto vectorial equivale al área del paralelogramo formado con los lados v_1 y v_2.

La regla de los tres dedos deriva la dirección de v_3.

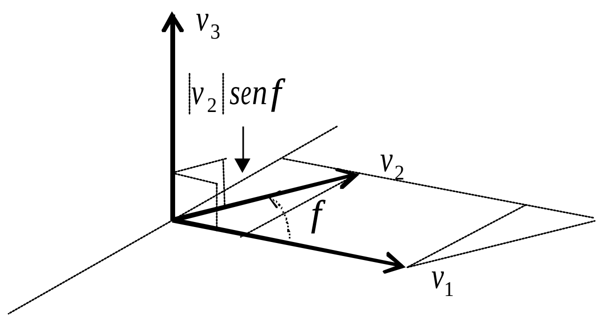


Figura 5 Producto cruz entre vectores

Ejemplo 7 Producto Vectorial

$$v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 - 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

El módulo del vector resultante es

$$|v_1 \times v_2| = 7.3485$$

El ángulo entre los vectores corresponde a

$$f = sen^{-1}\left(\frac{|v_1 \times v_2|}{|v_1| \cdot |v_2|}\right) = sen^{-1}\left(\frac{7.3485}{56.4805}\right) = 0.1305^0$$

fin Ejemplo 7

El producto vectorial $v_2 \times v_1$ tiene el mismo módulo que $v_1 \times v_2$, pero está orientado en la dirección opuesta, es decir,

$$v_2 \times v_1 = -(v_1 \times v_2) \tag{0.12}$$

En consecuencia el producto vectorial no es conmutativo.

Si los vectores son paralelos, el ángulo f es 0^0 ó 180^0 y

$$v_1 \times v_2 = |v_1||v_2| sen f = 0 \tag{0.13}$$

En consecuencia, el producto vectorial puede ser cero si uno (o ambos) vectores son cero o si estos son paralelos.

El producto vectorial es distributivo respecto a la suma,

$$\begin{aligned} v_1 \times (v_2 + v_3) &= v_1 \times v_2 + v_1 \times v_3 \\ (v_2 + v_3) \times v_1 &= v_2 \times v_1 + v_3 \times v_1 \end{aligned} \tag{0.14}$$

De manera directa se deducen, de los productos escalar y vectorial, sobre los vectores unitarios *i,j,k* de los ejes principales de un sistema de coordenadas dextrógiro, las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} & i \times j = -j \times i = k \\ & j \times k = -k \times j = i \\ & k \times i = -i \times k = j \\ & i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \\ & i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0 \end{aligned} \tag{0.15}$$

De la ecuación anterior se puede escribir el producto escalar de $v_1 \cdot v_2$ como

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= \left(v_{1x} i + v_{1y} j + v_{1z} k\right) \cdot \left(v_{2x} i + v_{2y} j + v_{2z} k\right) \\ &= v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} + v_{1z} v_{2z} \\ &= v_1^T v_2 \end{aligned} \tag{0.16}$$

Donde v_1^T indica la transpuesta de v_1. Así mismo, el producto vectorial se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \left(v_{1x} i + v_{1y} j + v_{1z} k\right) \times \left(v_{2x} i + v_{2y} j + v_{2z} k\right) \\ &= v_{1x} v_{2y} k - v_{1x} v_{2z} j - v_{1y} v_{2x} k + v_{1y} v_{2z} i + v_{1z} v_{2x} j - v_{1z} v_{2y} i \\ &= \left(v_{1y} v_{2z} - v_{1z} v_{2y}\right) i + \left(v_{1z} v_{2x} - v_{1x} v_{2z}\right) j + \left(v_{1x} v_{2y} - v_{1y} v_{2x}\right) k \end{aligned} \tag{0.17}$$

Otra manera de escribir el producto vectorial utiliza el producto matricial y la representación *skew simétrica* (matriz que cumple $\tilde{v} = -\tilde{v}^T$ (ver Sección Algebra de Matrices) de un vector

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 = \tilde{v}_1 v_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -v_{1z} & v_{1y} \\ v_{1z} & 0 & -v_{1x} \\ -v_{1y} & v_{1x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} \\ = -\tilde{v}_2 v_1 &= \begin{bmatrix} 0 & v_{2z} & -v_{2y} \\ -v_{2z} & 0 & v_{2x} \\ v_{2y} & -v_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{0.18}$$

Lo cual equivale también a la determinante de

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 8 Forma Skew Simétrica del Producto Vectorial

$$v_1 \times v_2 = \tilde{v}_1 v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 7 - 4\cdot 6 \\ 4\cdot 5 - 2\cdot 7 \\ 2\cdot 6 - 3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Este resultado es idéntico al obtenido en el Ejemplo 7.

fin Ejemplo 8

El *producto vectorial triple,* $v_1 \times (v_2 \times v_3)$, es un vector perpendicular a $v_2 \times v_3$ que se encuentra en el plano definido por v_2 y v_3

$$\begin{aligned} v_1 \times (v_2 \times v_3) &= (v_1 \cdot v_3) v_2 - (v_1 \cdot v_2) v_3 \\ (v_1 \times v_2) \times v_3 &= -(v_3 \cdot v_2) v_1 + (v_3 \cdot v_1) v_2 \end{aligned} \tag{0.19}$$

El *producto triple escalar,* $v_1 \cdot (v_2 \times v_3)$, es un escalar dado por,

$$v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = |v_1| |v_2| |v_3| \, sen j \, \cos f \,, \tag{0.20}$$

donde j es el ángulo entre los vectores v_2 y v_3, y f corresponde al ángulo entre v_1 y $v_2 \times v_3$. Expresando (0.20) en un espacio vectorial tridimensional equivale a la determinante,

$$v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} \tag{0.21}$$

Productos de más de tres operadores se simplifican haciendo uso del producto triple. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
v_1 \times v_2 \times v_3 \times v_4 &= \left(v_1 \times v_2 \cdot v_4\right) v_3 - \left(v_1 \times v_2 \cdot v_3\right) v_4 \\
&= \left(v_1 \cdot v_2 \cdot v_4\right) v_3 - \left(v_1 \cdot v_2 \cdot v_3\right) v_4
\end{aligned} \tag{0.22}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\left(v_1 \times v_2\right) \cdot \left(v_3 \times v_4\right) &= v_1 \cdot v_2 \times \left(v_3 \times v_4\right) \\
&= \left(\cdot v_2 \cdot v_4\right)\left(v_1 \cdot v_3\right) - \left(v_2 \cdot v_3\right)\left(v_1 \cdot v_4\right)
\end{aligned} \tag{0.23}
$$

Derivadas de Funciones Vectoriales

La derivada de un vector $v(t)$ está dada por

$$
\frac{dv}{dt} \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{0.24}
$$

De las ecuaciones (0.7) y (0.8) se deduce que

$$
\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right) i + \left(\frac{dv_y}{dt}\right) j + \left(\frac{dv_z}{dt}\right) k . \tag{0.25}
$$

La derivada *n-ésima* de $v(t)$ está dada por

$$
\frac{d^n v}{dt^n} = \left(\frac{d^n v_x}{dt^n}\right) i + \left(\frac{d^n v_y}{dt^n}\right) j + \left(\frac{d^n v_z}{dt^n}\right) k \tag{0.26}
$$

De la ecuación (0.24) se obtienen las siguientes reglas para diferenciar funciones vectoriales dependientes de tiempo

$$
\frac{d}{dt}\left(v_1 \pm v_2\right) = \frac{dv_1}{dt} \pm \frac{dv_2}{dt} \tag{0.27}
$$

$$
\frac{d}{dt}(sv) = s\frac{dv}{dt} \tag{0.28}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(v_1 \cdot v_2\right) = \frac{dv_1}{dt} \cdot v_2 + v_1 \cdot \frac{dv_2}{dt} \tag{0.29}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(v_1 \times v_2\right) = \frac{dv_1}{dt} \times v_2 + v_1 \times \frac{dv_2}{dt} \tag{0.30}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(v_1 v_2 v_3\right) = \frac{dv_1}{dt} \cdot v_2 \cdot v_3 + v_1 \cdot \frac{dv_2}{dt} \cdot v_3 + v_1 \cdot v_2 \cdot \frac{dv_3}{dt} \tag{0.31}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left[v_1 \times \left(v_2 \times v_3\right)\right] = \frac{dv_1}{dt} \times \left(v_2 \times v_3\right) + v_1 \times \left(\frac{dv_2}{dt} \times v_3\right) + v_1 \times \left(v_2 \times \frac{dv_3}{dt}\right) \tag{0.32}
$$

Ejemplo 9 Derivada de un vector

$$v_3(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \cos^2(t) \\ 3t^2 + 2t \end{bmatrix}$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -2\cos(t)\operatorname{sen}(t) \\ 6t+2 \end{bmatrix}$$

fin Ejemplo 9

Derivada Parcial de un Vector Respecto de Otro

En general, asumiendo un vector v_1 y un vector v_2 de dimensiones *m* y *n*, respectivamente. Adicionalmente, si *t* es una variable real y *f* una función de valores reales en *t*, $v_1 = v_1(t)$ y $v_2 = v_2\left[v_1(t)\right]$ siendo funciones vectoriales de *t* de m y *n* dimensiones también, con $f = f(v_1, v_2)$. La derivada de v_1 respecto de *t*, denotada por $\dot{v}_1(t)$, es un vector *m*-dimensional cuyo *i-ésimo* componente es la derivada del *i-ésimo* componente de v_1 en una base dada, v_{1i}, con respecto de *t*. La derivada parcial de *f* respecto de v_1 es un vector *m*-dimensional cuyo *i-ésimo* componente es la derivada parcial de *f* respecto de v_{1i}.

$$\frac{d\,f}{dv_1} \equiv \begin{bmatrix} \partial f/\partial v_{1_1} \\ \partial f/\partial v_{1_2} \\ \vdots \\ \partial f/\partial v_{1_m} \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\,f}{dv_2} \equiv \begin{bmatrix} \partial f/\partial v_{2_1} \\ \partial f/\partial v_{2_2} \\ \vdots \\ \partial f/\partial v_{2_n} \end{bmatrix} \tag{0.33}$$

La derivada parcial de v_2 respecto de v_1 es un arreglo de $n \times m$ cuya entrada (i, j) está definida por $\partial v_{2_i} / \partial v_{1_j}$, es decir,

$$\frac{dv_2}{dv_1} \equiv \begin{bmatrix} \partial v_{2_1}/\partial v_{1_1} & \partial v_{2_1}/\partial v_{1_2} & \cdots & \partial v_{2_1}/\partial v_{1_m} \\ \partial v_{2_2}/\partial v_{1_1} & \partial v_{2_2}/\partial v_{1_2} & \cdots & \partial v_{2_2}/\partial v_{1_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial v_{2_n}/\partial v_{1_1} & \partial v_{2_n}/\partial v_{1_2} & & \partial v_{2_n}/\partial v_{1_m} \end{bmatrix} \tag{0.34}$$

Por lo tanto la derivada total de *f* respecto de v_1 puede escribirse como,

$$\frac{df}{dv_1} = \frac{\partial f}{\partial v_1} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial v_1}\right)^T \frac{\partial f}{\partial v_2} \tag{0.35}$$

Si, además, f es una función explícita de t ($f = f(v_1, v_2, t)$) y $v_2 = v_2(v_1, t)$, entonces, la derivada total de f puede escribirse de la siguiente manera,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)^T \frac{\partial v_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial v_2}\right)^T \frac{\partial v_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial v_2}\right)^T \frac{\partial v_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t} \tag{0.36}$$

De igual manera la derivada total de v_2 respecto a t está dada por,

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt} \tag{0.37}$$

Ejemplo 10 Derivada parcial de un vector

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} v_{1y} \cdot v_{2z} - v_{1z} \cdot v_{2y} \\ v_{1z} \cdot v_{2x} - v_{1x} \cdot v_{2z} \\ v_{1x} \cdot v_{2y} - v_{1y} \cdot v_{2x} \end{bmatrix}$$

Por ende, utilizando la ecuación (0.34)

$$\frac{d(v_1 \times v_2)}{dv_2} = \begin{bmatrix} 0 & -v_{1z} & v_{1y} \\ v_{1z} & 0 & -v_{1x} \\ -v_{1y} & v_{1x} & 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la derivada parcial del producto vectorial de cualquier par de vectores tridimensionales, v_1 y v_2, se puede expresar como una matriz de dimensión 3 *skew-simétrica* ($A^T = -A$). A esta matriz se le denomina la matriz del producto cruz y la se representará en este texto con la notación $\tilde{v}$.

La propiedad *skew*-simétrica de la matriz producto vectorial tiene como consecuencia que,

$$\tilde{a}(\tilde{a}b) = A^2 b \tag{0.38}$$

donde

$$A^2 = -|a|^2 I + aa^T \, . \tag{0.39}$$

fin Ejemplo 10

Ejercicio 1 Probar que $\tilde{a}\left(\tilde{a}b\right) = A^2 b$

Integración de Funciones Vectoriales

Si $\dfrac{dv_1}{dt} = v_2\left(t\right)$, entonces la integral del vector $v_2\left(t\right)$ es

$$v_1\left(t\right) = \int v_2\left(t\right) + v_3 \tag{0.40}$$

Donde v_3 es un vector constante. Si $v_2\left(t\right)$ es expresable en un sistema de coordenadas cartesiano, entonces los componentes derivados sobre los ejes principales están dados por

$$v_{1(x,y,z)}\left(t\right) = \int v_2\left(t\right)dt + v_{3(x,y,z)} \tag{0.41}$$

Algebra de Matrices

Una matriz es una ordenación rectangular de números dispuestos en filas y columnas. Los campos de intersección entre filas y columnas se denominan elementos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{0.42}$$

donde $filas = 1,2,\ldots,m$ y $columnas = 1,2,\ldots,n$.

La traspuesta de una matriz A se escribe como A^T corresponde a la matriz resultante de intercambiar las filas de A por sus columnas, es decir si A está dada por (0.42),

$$\mathrm{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{0.43}$$

donde $filas = 1,2,\ldots,n$ y $columnas = 1,2,\ldots,m$.

Ejemplo 11 Traspuesta de una matriz

Encuentre la traspuesta de la matriz A,

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

fin Ejemplo 11

Las *matrices cuadradas* de orden *n* tienen igual número de filas que columnas. Las *matrices diagonales* de orden *n* son matrices cuadradas cuyos elementos fuera de la diagonal son cero ($a_{i \neq j} = 0$).

La *matriz unidad*, también denominada *matriz identidad*, de orden *n* es una matriz diagonal con todos los elementos diagonales igual a la unidad ($a_{i=j} = 1; a_{i \neq j} = 0$). La matriz identidad se escribe I_n.

La *matriz nula* es una matriz con todos sus elementos igual a cero.

Las *matrices simétricas* son matrices cuadradas de orden *n* cuya traspuesta es idéntica a si misma ($\mathrm{A}=\mathrm{A}^T$).

Las *matrices antisimétricas* son matrices cuadradas de orden *n* cuya traspuesta es igual al complemento de la normal ($a_{ij} = -a_{ji}$ y $a_{ii} = 0$ o simplemente $\mathrm{A}=-\mathrm{A}^T$).

Cualquier matriz cuadrada A no simétrica se puede convertir en una matriz simétrica C,

$$\mathrm{C}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}{2} \tag{0.44}$$

Ejemplo 12 Simetría de una matriz cuadrada no simétrica

Utilzando A,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3.5 & 6 & 8.5 \\ 3.5 & 6 & 8.5 & 11 \\ 6 & 8.5 & 11 & 13.5 \\ 8.5 & 11 & 13.5 & 16 \end{bmatrix}$$

fin Ejemplo 12

La igualdad entre matrices se da si y solo si son del mismo orden y sus respectivos elementos son todos iguales.

Suma/Resta de Matrices

La suma/resta de matrices, del mismo orden, corresponde a la suma de los elementos respectivos en los operandos matriciales. Es decir, los elementos de una matriz A (a_{ij}) y una matriz B (b_{ij}) se suman para producir una matriz C (c_{ij})de la siguiente manera,

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij} \,. \tag{0.45}$$

La suma de matrices tiene las mismas propiedades de la suma de números escalares reales (es decir, es conmutativa y distributiva).

Multiplicación de Matrices

El producto de un escalar por una matriz equivale a multiplicar todos los elementos de la matriz por el escalar,

$$sA = As = \left[s\,a_{ij}\right] = \left[a_{ij}\,s\right] \tag{0.46}$$

Donde *i* y *j* corresponden a los índices de fila y columna de la matriz.

Dos matrices pueden multiplicarse entre si, si y solo si son *matrices conformables*, es decir, para la operación matricial $AB = C$ el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de *B*, dando como resultado una matriz C con el mismo número de filas de A y con el mismo número de columnas de B. Es decir,

$$A_{m\times n}B_{n\times o} = C_{m\times o} \tag{0.47}$$

Donde cada elemento de C está dado por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Ejemplo 13 Multiplicación de matrices

Utilzando A,

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 84 & 69 & 54 \\ 138 & 114 & 90 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 114 & 138 \\ 54 & 69 & 84 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\left(B^T \cdot A^T\right)^T = A\cdot B = \begin{bmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 84 & 69 & 54 \\ 138 & 114 & 90 \end{bmatrix}$$

fin Ejemplo 13

En general, el producto de matrices *no es conmutativo* ($AB \neq BA$ ver Ejemplo 13). En caso de ser conmutativo el producto, se dice que las matrices son conmutativas. La matriz identidad conmuta con cualquier matriz cuadrada.

En general, $AB = 0$ no implica que A=0 o que B=0.

La multiplicación de matrices es asociativa y distributiva respecto de la suma de matrices,

$$(sA)B = s(AB) = A(sB) \tag{0.48}$$

$$A(BC) = (AB)C \tag{0.49}$$

$$(A+B)C = AC + BC \tag{0.50}$$

$$C(A+B) = CA + CB \tag{0.51}$$

Otras propiedades del producto de matrices son,

$$A_{m\times n}B_{n\times 1} = C_{m\times 1} \quad \text{(Matriz columna)} \tag{0.52}$$

$$A_{1\times n}B_{n\times 1} = escalar \qquad (0.53)$$

$$A_{1\times n}B_{n\times m} = C_{1\times m} \quad \text{(Matriz fila)} \qquad (0.54)$$

$$A_{n\times 1}B_{1\times m} = C_{n\times m} \qquad (0.55)$$

Las matrices pueden operarse utilizando bloques (sub-matrices) dentro de las mismas, utilizando las propiedades anteriores. En algunos casos puede ser útil dividir las matrices en bloques para simplificar la notación.

Determinantes

La determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna y sus respectivos *adjuntos (o cofactores)*. Es decir,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij} \qquad (0.56)$$

A_{ij} es el adjunto de a_{ij}, y corresponde a,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij} \qquad (0.57)$$

donde M_{ij} corresponde al *menor complementario* que se obtiene de eliminar los elementos de la *i-ésima* fila y los elementos de la *j-ésima* columna de $|A|$.

Los determinantes de orden *n* se pueden expresar en términos de *n* determinantes de orden *n-1*, y estos a su vez en términos de *n-1* determinantes de orden *n-2*, y así sucesivamente hasta llegar a determinantes de orden 1 (escalares).

Ejemplo 14 Determinante de una matriz

Las determinantes de orden 2 y 3 se evalúan de manera sencilla mediante dos reglas,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (0.58)$$

y

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \end{aligned} \qquad (0.59)$$

Para una matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{0.60}$$

Su determinante se escribe como

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{0.61}$$

Y se calcula,

$$\begin{aligned} |A| = {} & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ & a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\ = {} & a_{11} \left(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{42}a_{33}a_{24} - a_{43}a_{34}a_{22} - a_{44}a_{32}a_{23} \right) - \\ & a_{12} \left(a_{21}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{43} - a_{41}a_{33}a_{24} - a_{43}a_{34}a_{21} - a_{44}a_{31}a_{23} \right) + \\ & a_{13} \left(a_{21}a_{32}a_{44} + a_{22}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32}a_{24} - a_{42}a_{34}a_{21} - a_{44}a_{31}a_{22} \right) - \\ & a_{14} \left(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{22}a_{33}a_{41} + a_{23}a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32}a_{23} - a_{42}a_{33}a_{21} - a_{43}a_{31}a_{22} \right) \end{aligned} \tag{0.62}$$

fin Ejemplo 14

Reglas de simplificación en el cálculo de determinantes

1. Si existe una fila o una columna con todos sus elementos cero, entonces $|A| = 0$

2. $|A| = |A^T|$

3. Si se intercambia dos filas o dos columnas de A, cambia el signo de la determinante

4. Si se multiplica un vector fila o un vector columna de A por un escalar, el determinante queda multiplicado por dicho escalar.

5. Si el rango de una matriz de orden *n* es menor que *n*, su determinante es cero. En general, si las filas de una matriz

cuadrada A de orden n son linealmente independientes, el determinante de esa matriz es diferente de cero y se dice que la matriz es *no singular*.

6. Si se suma un múltiplo de una fila o columna a otra fila o columna, el determinante sigue teniendo el mismo valor.

Si el determinante de una matriz cuadrada es cero, la matriz es *singular* y las filas de esta matriz no son linealmente independientes. Se puede utilizar el determinante de una matriz para determinar si es o no singular (esto es de utilidad en el análisis de singularidad cinemáticas de un manipulador robótico – ver Capítulo Cinemática).

El rango de una matriz A indica el número de filas o columnas linealmente independientes de la matriz y es el orden de la submatriz más grande de A con determinante distinto de cero.

Matrices Adjuntas e Inversas

La transpuesta de la matriz formada por los adjuntos de una matriz se llama *matriz adjunta*. Para una matriz A,

$$\left[A_{ij} \right]^T = \left[A_{ji} \right] \tag{0.63}$$

Donde A_{ij} corresponde a la matriz de los adjuntos (cofactores) de A (ver sección Determinantes).

La inversa de una matriz cuadrada no singular A¸ A^{-1}, es la matriz adjunta de A (adj A *o* A^*) dividida por el determinante de A, es decir,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\, A}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{\left[A_{ij} \right]^T}{|A|} \tag{0.64}$$

La adjunta de una matriz está relacionada con su inversa por

$$AA^* = |A| I \tag{0.65}$$

Siendo A invertible.

Ejemplo 15 Inversa de una matriz

Dada una matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

fin Ejemplo 15

Una matriz cuadrada general puede ser invertida utilizando métodos como el de eliminación Gauss-Jordan, eliminación Gaussiana, o descomposición LU.

Ejercicio 2 Utilice el método de eliminación Gaussiana y el de descomposición LU para hallar la inversa de una matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

fin Ejercicio 2

El producto de A por su inversa es la matriz identidad (de mismo orden de A), es decir,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{0.66}$$

Reemplazando (0.64) en (0.66),

$$\begin{gathered} A\left(\frac{\text{adj}\,A}{|A|}\right) = \left(\frac{\text{adj}\,A}{|A|}\right)A = I \\ A\left(\text{adj}\,A\right) = \left(\text{adj}\,A\right)A = |A|\,I \end{gathered} \tag{0.67}$$

De (0.66)

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} \tag{0.68}$$

La inversa del producto de matrices cuadradas del mismo orden es equivalente al producto de las inversas de cada matriz en orden inverso, es decir,

$$\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1} \tag{0.69}$$

La traspuesta del producto de matrices del mismo orden es equivalente al producto de las traspuestas de cada matriz en orden inverso, es decir,

$$\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right)^T = A_n^T A_{n-1}^T \cdots A_2^T A_1^T \tag{0.70}$$

Un resultado importante que es empleado en el cálculo de la dinámica directa para manipuladores seriales es el llamado *lema de inversión de matrices (complemento de Schur)* que se puede enunciar de la siguiente forma,

$$\left(A^{-1} + B^T C B\right)^{-1} = A - AB^T \left(BAB^T + C^{-1}\right)^{-1} BA \tag{0.71}$$

Traza de una Matriz

La traza de una matriz cuadrada A de orden n es la suma de sus elementos diagonales,

$$Tr\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{0.72}$$

Algunas propiedades de interés sobre del operador de traza son,

$$Tr\left(A\right) = Tr\left(A^T\right) \tag{0.73}$$

$$Tr\left(A+B\right) = Tr\left(A\right) + Tr\left(B\right) \tag{0.74}$$

$$Tr\left(AB\right) = Tr\left(BA\right) \tag{0.75}$$

$$Tr\left(ABC^T\right) = Tr\left(CB^T A^T\right) \tag{0.76}$$

Vectores y Valores Propios de una Matriz (eigenvectors y eigenvalues)

Se le llama *valor propio* de una matriz a un número si existe un vector no nulo que al multiplicarse por la matriz sea igual al mismo vector multiplicado por un valor propio. Al vector se le denomina *vector propio*.

Formalmente, si A es un operador lineal en un espacio vectorial, v un vector no nulo en el mismo espacio y l un escalar (posiblemente cero) de tal manera que

$$Av = lv \tag{0.77}$$

Entonces, se dice que v es un vector propio del operador A, y su valor propio asociado es l. De hecho, cualquier múltiplo de v también es un vector propio con valor propio l.

De (0.77) es posible afirmar que el sistema lineal de ecuaciones dado por

$$\left(A - lI\right)x = 0 \tag{0.78}$$

donde, I corresponde a la matriz identidad, tiene una solución no nula en el vector x (un vector propio de A) siempre y cuando

$$\det\left(A - l I\right) = 0 \tag{0.79}$$

La función

$$p\left(l\right) = \det\left(A - l I\right) \tag{0.80}$$

es un polinomio en l considerando que las determinantes son definibles como suma de productos. A este polinomio se le denomina el *polinomio característico* de A: sus ceros son precisamente los valores propios de A. Para una matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$, su polinomio característico tiene un grado de n y por lo tanto A puede tener hasta n valores propios.

El teorema de Cayley-Hamilton estipula que toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica, es decir que si se reemplaza l por A en (0.80),

$$p\left(A\right) = 0 \tag{0.81}$$

Como podrá constatarse del Ejemplo 16, el teorema de Cayley-Hamilton permite calcular potencias matriciales de forma más simple que la multiplicación directa así como encontrar los vectores propios de una matriz.

Ejemplo 16 Polinomio característico de una matriz cuadrada

Considerando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico está dado por

$$\begin{aligned} p\left(l\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-l & 2 \\ 3 & 4-l \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(1-l\right)\left(4-l\right) - 2\cdot 3 = l^2 - 5l - 2 \end{aligned}$$

Los valores propios son entonces $l = 5.372, -0.372$.

Del teorema de Cayley-Hamilton se deduce

$$A^2 - 5A - 2 = 0 \tag{0.82}$$

Por ende,

$A^2 = 5A + 2$.

Esto sirve para calcular potencias superiores de A,

$$A^3 = (5A + 2I)A = 5A^2 + 2A = 5(5A + 2I) + 2A = 27A + 10I$$
$$A^4 = (27A + 10I)A = 27A^2 + 10A = 27(5A + 2I) + 10A = 145A + 54I$$

Para calcular la inversa de A $\left(A^{-1}\right)$, se premultiplica (0.82) por A^{-1},

$$A^{-1}\left[A^2 - 5A - 2\right] = 0$$
$$A - 5 - 2A^{-1} = 0$$

Y se resuelve A^{-1},

$$A^{-1} = \frac{1}{2}[A - 5]$$

fin Ejemplo 16

Resolver polinomios de alto grado (para matrices grandes) se hace de manera convencional utilizando algoritmos numéricos (iterativos)[1].

Sin embargo, es también posible utilizar la identidad de Sylvester. Esta define que si $l_i, i = 1, \ldots, n$ son los valores propios de la matriz A, entonces un polinomio de la matriz A, $p(A)$, puede expresarse como un polinomio de grado $n-1$ o menor utilizando

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p(l_k)}{\prod_{i=1, i\neq k}^{n}(l_k - l_i)}\prod_{i=1, i\neq k}^{n}(A - l_i I)\right] \tag{0.83}$$

Ejemplo 17 Aplicación de la identidad de Silvester

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -4 & -7 \\ 7 & -2 & -5 \\ 10 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

[1] Algoritmos de factorización como el algoritmo QR se emplean para encontrar los valores y vectores propios de una matriz cuadrada de alta dimensión.

Con una ecuación característica dada por $f(l) = -2l + 3l^2 - l^3$ y valores propios $l = 2, 0, 1$. Simplifique el polinomio matricial, $g(A) = A^8 + 3A^6 - A^2 + 4A$ en un polinomio matricial de menor grado.

$$g(2) = 2^8 + 3\left(2^6\right) - 2^2 + 4(2) = 452$$
$$g(0) = 0$$
$$g(1) = 1 + 3 - 1 + 4 = 7$$

$$g(A) = \frac{g(2)}{(2-0)(2-1)}(A - 0I)(A - I) + 0 + \frac{g(1)}{(1-0)(1-2)}(A - 0I)(A - 2I)$$
$$= \frac{452}{2}\begin{bmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \\ 12 & -4 & -8 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2705 & -904 & -1801 \\ 1363 & -452 & -911 \\ 2698 & -904 & -1794 \end{bmatrix}$$

Como una expresión reducida, $g(A)$ puede escribirse como

$$g(A) = 219A^2 = 212A$$

Los invariantes de una matriz cuadrada

La ecuación característica de una matriz cuadrada puede escribirse en la forma:

$$f(l) = (-1)^n l^n + (-1)^{n-1} b_1 l^{n-1} + (-1)^{n-2} b_2 l^{n-2} + \cdots - b_{n-1} l + b_n = 0$$

donde los coeficientes, $b_i, i = 1, \ldots, n$ son invariantes, es decir, permanecen sin cambio ante transformaciones ortogonales. Algunos de los invariantes más evidentes son,

$$b_1 = Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

$$b_n = |A|$$

Las demás invariantes, b_i, corresponden a la sumatoria de todas las combinaciones de submatrices $i \times i$ a lo largo de la diagonal de A. El número de términos en la suma es $n!/\left(i!(n-1)!\right)$.

Ejemplo 18 Invariantes de una matriz cuadrada de 3x3

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sus invariantes son,

$$b_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = l_1 + l_2 + l_3 ,$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3 ,$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = l_1 l_2 l_3 .$$

Fin Ejemplo 18

Ejemplo 19 Invariantes de una matriz cuadrada de 4x4

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y sus valores propios $l = -4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 10$ sus invariantes calculados a partir de los valores propios son:

$$\begin{aligned} b_1 &= -4 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 10 = 6 \\ b_2 &= (-4)\left(-\sqrt{2}\right) + (-4)\left(\sqrt{2}\right) + (-4)(10) + \left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right) + \left(-\sqrt{2}\right)(10) + \left(\sqrt{2}\right)(10) \\ &= -40 - 2 = -42 \\ b_3 &= (-4)\left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right) + \left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)(10) + (-4)\left(\sqrt{2}\right)(10) + (-4)\left(\sqrt{2}\right)(10) \\ &= 8 - 20 = -12 \\ b_4 &= (-4)\left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)(10) = 80 \end{aligned}$$

y las invariantes calculadas de los elementos matriciales son

$$b_1 = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 17 - 23 - 23 + 17 = -12$$

$$b_4 = |A| = 80$$

Por lo tanto la ecuación característica de A es

$$f(l) = l^4 - 6l^3 - 42l^2 + 12l + 80 = 0$$

Fin Ejemplo 19

Invariantes lineales de una matriz de 3x3

Dada una matriz A cualquiera de dimensión 3x3, su descomposición Cartesiana, la contraparte de la representación Cartesiana de números complejos, consiste de la suma de su parte simétrica, As, y su parte skew-simétrica, Ass, definidas como

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right), \qquad A_{SS} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \tag{0.84}$$

El *vector* de A (solo para matrices de 3x3), es el vector a (vector axial) con la propiedad

$$a \times v = A_{SS} v \tag{0.85}$$

Para cualquier vector v tridimensional. La traza de A es la suma de los valores propios de As (reales). Asumiendo que los elementos de la matriz A están dados por a_{ij}, para $i, j = 1,2,3$ los invariantes definidos en la ecuación (0.84) son

$$vect(A) = a = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}, \qquad tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{0.86}$$

Es evidente de lo anterior que el vector de una matriz 3x3 desvanece si y solo si es simétrica, mientras la traza de cualquier matriz (independiente de su dimensión) desvanece (condición suficiente pero no necesaria) si la matriz es skew-simétrica (los elementos diagonales son cero).

Otras relaciones útiles para cualquier par de vectores v_1 y v_2, el vector resultante de su producto escalar está dado por,

$$vect\left(v_1 v_2^T\right) = -\frac{1}{2}\left(v_1 \times v_2\right) \tag{0.87}$$

y su traza

$$tr\left(v_1 v_2^{\,T}\right) = v_1^{\,T} v_2 \tag{0.88}$$

Invariantes lineales de una rotación

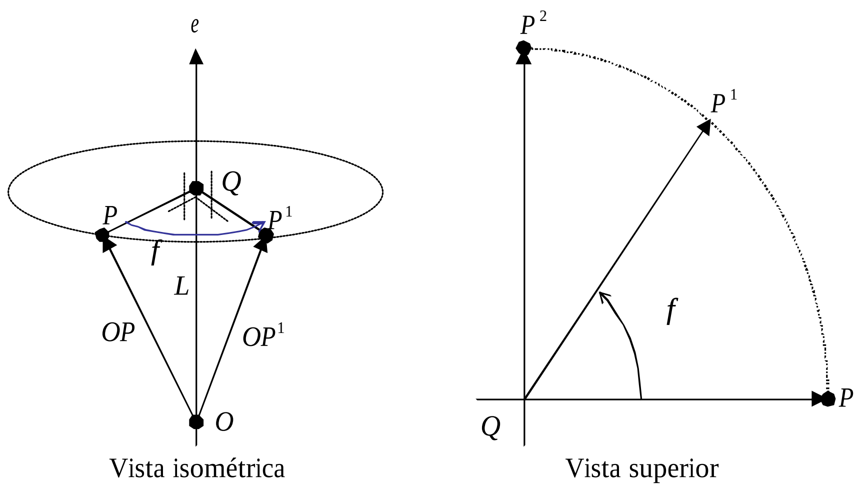


Figura 6 Rotación de un cuerpo alrededor de una línea recta

La representación de una matriz de rotación en términos de sus valores propios es posible gracias al *teorema de Euler* (1776). Este dice que el movimiento de un cuerpo rígido (ver Figura 6) alrededor de un punto O deja fijos un conjunto de puntos que yacen sobre una línea L que pasa a través de O y es paralela al vector propio, e, de la matriz de rotación asociado con el valor propio +1 (considerando Q como una matriz ortogonal propia de 3x3, esta tiene al menos un valor propio igual a +1, por ende $Qe = e$). Esta representación debe contener la cantidad de rotación bajo estudio, que no es otra cosa que el ángulo de rotación.

Considere la rotación de un punto P, diferente de los que yacen sobre la línea recta L, de un cuerpo rígido representada en la Figura 6 en un ángulo f alrededor de la línea recta L. Entonces,

$$OP^1 = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP^1} \tag{0.89}$$

donde $\overrightarrow{OQ}$ es el componente axial a lo largo del vector e, que se deriva de la siguiente manera,

$$\overrightarrow{OQ} = ee^T OP\,. \tag{0.90}$$

De la vista superior en la Figura 6,

$$\overrightarrow{QP}^1 = \cos(f)\,\overrightarrow{QP} + \sin(f)\,\overrightarrow{QP}^2 \tag{0.91}$$

donde $\overrightarrow{QP}$ es la componente *normal* respecto de e,

$$\overrightarrow{QP} = \left(1 - ee^T\right)OP \tag{0.92}$$

y

$$\overrightarrow{QP}^2 = e \times OP = \tilde{e}OP \tag{0.93}$$

Reemplazando (0.93) y (0.92) en la ecuación (0.91) resulta en

$$\overrightarrow{QP}^1 = \cos(f)\left(1 - ee^T\right)OP + \sin(f)\tilde{e}OP \tag{0.94}$$

Substituyendo (0.90) en la (0.94) en la ecuación (0.89) resulta en

$$OP^1 = ee^T OP + \cos(f)\left(1 - ee^T\right)OP + \sin(f)\tilde{e}OP \tag{0.95}$$

Factorizando OP de (0.95) se reduce a

$$OP^1 = \left[ee^T + \cos(f)\left(1 - ee^T\right) + \sin(f)\tilde{e}\right]OP \tag{0.96}$$

De la ecuación anterior es aparente que OP^1 es una combinación lineal de OP. La transformación que expresa dicha relación está dada por el término matricial dentro de corchetes en (0.96) que corresponde a la matriz Q buscada, es decir,

$$Q = ee^T + \cos(f)\left(1 - ee^T\right) + \sin(f)\tilde{e} \tag{0.97}$$

Un caso especial resulta en una matriz Q simétrica y surge cuando $f = p$ (también cuando $f = 0$),

$$Q = -1 + 2ee^T\,. \tag{0.98}$$

Exceptuando los dos casos anteriores la matriz de rotación no es simétrica (y nunca será skew-simétrica porque esta sería necesariamente singular, contradiciendo la propiedad de ortogonalidad de las matrices de rotación).

Para una matriz de rotación, Q,

$$vect\,(Q) = vect\,(\sin f\,\tilde{e}) = \sin f\, e \tag{0.99}$$

mientras

$$\begin{aligned} Tr\,(Q) &= Tr\left[ee^T + \cos(f)\left(1 - ee^T\right) + \sin(f)\tilde{e}\right] \\ &= e^T e + \cos(f)\left(3 - e^T e\right) = 1 + 2\cos f \end{aligned} \tag{0.100}$$

Por ende

$$\cos f = \frac{Tr\left(Q\right) - 1}{2} \tag{0.101}$$

De lo anterior surge que el vector de Q puede denominarse como $\left[q_1, q_2, q_3\right]^T$ y que en vez de utilizar la traza de Q como la otra invariante lineal se puede utilizar $q_0 = \cos\left(f\right)$ (que está escrito en términos de la traza). En consecuencia, la matriz de rotación está definida completamente por cuatro parámetros escalares que pueden ser convenientemente representados mediante un arreglo 4-dimensional,

$$l = \left[q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_0\right]^T \tag{0.102}$$

Estos cuatro parámetros están relacionados entre si por,

$$\left|q\right|^2 + q_0^2 = \sin^2\left(f\right) + \cos^2\left(f\right) = 1 \tag{0.103}$$

y

$$\left|l\right|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_0^2 = 1. \tag{0.104}$$

De cualquier manera, a partir de (0.99), se deduce que el uso de los invariantes lineales para expresar una rotación no es adecuado cuando el ángulo de rotación asociado está cerca de p o es p (dada la existencia de singularidades, $e = q / \sin\left(f\right)$).

Ejemplo 20 Determine si una supuesta transformación corresponde a una rotación de cuerpo rígido y si lo es, encuentre sus invariantes naturales.

La representación lineal de una matriz de transformación Q en un marco de referencia dado está dada por,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

El primer paso es comprobar que el arreglo sea ortogonal.

$$QQ^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

y verificar que su determinante sea unitaria

$$|Q| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

De la ecuación (0.86) y por

$$vec(Q) = q = \text{sen}(f)e = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-1 \end{bmatrix} = 0$$

$$Tr(Q) = 1$$

Fin Ejemplo 20

Conceptos de Invarianza

En esta sección nos interesa la propiedad de invarianza bajo transformación de coordenadas. Su aplicación en robótica está ligada a problemas relacionados con la calibración cinemática de brazos y sensores, aprovechando sistemas redundantes. Si suponemos la existencia de una función escalar, una vectorial y una matricial del vector de posición p denotadas por $\text{f}(p), f(p), \text{y} F(p)$, respectivamente. La representación de $\text{f}(p)$ en dos sistemas coordenados diferentes, etiquetados A y B, es expresada como $f(p)_A$ y $f(p)_B$ (igual para $F(p)$). Si asumimos además que ambos sistemas de coordenadas están en una posición (origen diferente) y una orientación diferente y que la rotación del sistema A hacia el B está dada por la matriz ortogonal propia Q_B^A, entonces la función escalar $\text{f}(p)$ se dice ser invariante del sistema o marco de coordenadas, si

$$\text{f}(p)_B = \text{f}(p)_A \,. \tag{0.105}$$

De igual manera, la cantidad vectorial f y la cantidad matricial F se dicen ser invariantes si

$$f_A = Q_B^A f_B, \tag{0.106}$$

y

$$F_A = Q_B^A F_B \left(Q^T\right)_B^A \tag{0.107}$$

respectivamente.

En consecuencia, la diferencia en orígenes se hace irrelevante (las matrices de rotación no expresan diferencia de posición). Sin embargo, algunas cantidades escalares asociadas con vectores (Vg. producto escalar, producto vectorial) y matrices (Vg. *Momentos matriciales*) son inalteradas por cambios de sistemas de coordenadas,

$$\left(v_1\right)_A^T \left(v_2\right)_A = \left(v_1\right)_B^T \left(v_2\right)_B \tag{0.108}$$

$$\left(v_1 \times v_2\right)_A = Q_B^A \left(v_1 \times v_2\right)_B \tag{0.109}$$

El *k-ésimo* momento de una matriz A (Leigh 1989), denotado por I_k, se define como

$$I_k = tr\left(A^k\right) \qquad k = 0,1,\ldots \tag{0.110}$$

Si la traza de una matriz es invariante, también lo son sus momentos.

Ejercicio 3 Probar que si la traza de una matriz es invariante, también lo son sus momentos.

Además, una matriz de *nxn* solo tiene n momentos linealmente independientes.

Ejercicio 4 Pruebe que una matriz de nxn tiene únicamente n momentos lineales independientes (Ayuda: utilice el polinomio característico y el teorema de Cayley-Hamilton.

Transformaciones de Similitud

Es importante estudiar *transformaciones de similitud* porque preservan las cantidades invariantes en matrices como: sus valores propios y vectores propios en matrices (por lo tanto también el polinomio característico), la magnitud en vectores, los ángulos entre vectores, entre otros. En particular son de interés en robótica de manipuladores los *isomorfismos*, transformaciones de un espacio vectorial sobre si mismo, que implican un cambio de los vectores de base asociados. Las siguientes transformaciones de similitud son de interés,

$$v_A = A_A^B v_B, \tag{0.111}$$

Su inversa

$$v_B = \left(A^{-1}\right)_A^B v_A, \tag{0.112}$$

$$L_B = \left(A^{-1}\right)_A^B L_A A_A^B, \tag{0.113}$$

Para,

$$L_A = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{41} & l_{42} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{0.114}$$

y

$$L_A = A_A^B L_B \left(A^{-1} \right)_A^B \tag{0.115}$$

Ejercicio 5 Probar que el polinomio característico para L_A *es idéntico al de* L_B.

Para probar que dos matrices diferentes representan la misma transformación lineal, y por ende, están relacionadas con la misma transformación de similitud, se debe verificar que comparten el mismo conjunto de *n* momentos I_{k1}^n (el momento cero es compartido por todas las matrices *nxn*, en consecuencia no es necesario calcularlo). En otras palabras, si dos matrices *nxn* comparten los mismos *n* momentos, entonces representan la misma transformación lineal pero en diferentes sistemas coordenados (esto aplica principalmente para matrices simétricas).

Los vectores invariantes de una matriz *nxn* son sus vectores propios, que para las matrices simétricas implica sus valores propios son reales (vectores propios reales y mutuamente ortonormales).

Ejemplo 21 Encuentre si las siguientes matrices están relacionadas por una transformación de similitud

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

La traza de las dos matrices es idéntica, 4. Se verifica entonces el segundo y el tercer momento,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Tr\left(A^2\right) = 8, \qquad Tr\left(B^2\right) = 8$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}, \qquad B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -8 \\ 0 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Tr\left(A^3\right) = 19, \qquad Tr\left(B^3\right) = 19$$

En consecuencia las dos matrices están relacionadas por una transformación de similitud, por lo cual representan la misma transformación lineal.

fin Ejemplo 21

Calibración de Sensores (Mano-Ojo)

Principios de Trigonometría

La trigonometría estudia la medida de los triángulos. Su estudio comprende la medida de lados y ángulos en triángulos o como puntos en un círculo unitario. En el contexto de la robótica de manipuladores su uso es común considerando que el espacio de trabajo de los mismos se puede analizar desde un punto de vista geométrico. Esta sección presenta algunas de las herramientas básicas de la trigonometría requeridas para el estudio geométrico del movimiento espacial de los manipuladores robóticos.

Trigonometría con triángulos

El triángulo recto

Un triángulo recto es aquel que tiene exactamente un ángulo de 90^0. La suma de los ángulos internos en un triángulo es siempre de 180^0. La hipotenusa es el lado más largo del triángulo recto y siempre está localizado opuesto al ángulo recto. Los lados de menor dimensión se denominan *catetos.* El *teorema de Pitágoras* se utiliza para encontrar el largo de un lado triángulo recto cuando los otros dos son conocidos.

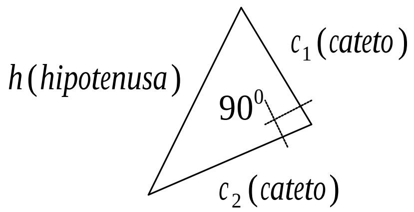


Figura 7 Tríangulo recto

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \tag{0.116}$$

Existen algunos triángulos rectos utilizados a menudo, en consecuencia, es de utilidad conocer la relación entre sus lados de memoria.

- Los triángulos rectos con ángulos internos de $30^0, 60^0, 90^0$ tienen lados con las relaciones $1, \sqrt{3}, 2$. Es decir, el cateto más largo es siempre $\sqrt{3}$ más largo que el más pequeño, y la hipotenusa es siempre 2 veces el tamaño del cateto más pequeño.

- Los triángulos rectos con ángulos internos de $45^0, 45^0, 90^0$ tienen lados con las relaciones $1, 1, \sqrt{2}$. Es decir, ambos catetos son siempre de la misma dimensión, y la hipotenusa es siempre $\sqrt{2}$ veces el tamaño de cualquiera de sus catetos.

Trigonometría del Triángulo Recto

Las funciones trigonométricas de un ángulo están relacionadas con la relación entre lados de un triángulo recto. Estas se definen de la siguiente manera

$$\operatorname{sen}(q)=\frac{catetoopuesto}{hipotenusa} \qquad \csc(q)=\frac{1}{\operatorname{sen}(q)}=\frac{hipotenusa}{catetoopuesto} \tag{0.117}$$

$$\cos(q)=\frac{catetoadjacente}{hipotenusa} \qquad \sec(q)=\frac{1}{\cos(q)}=\frac{hipotenusa}{catetoadjacente} \tag{0.118}$$

$$\tan(q)=\frac{catetoopuesto}{catetoaadjacente} \qquad \cot(q)=\frac{1}{\tan(q)}=\frac{catetoadjacente}{catetoopuesto} \tag{0.119}$$

Donde q corresponde a los ángulos agudos (menor de 90^0) del triángulo recto, el *cateto opuesto* corresponde al cateto que no toca el vértice del ángulo nombrado en la función trigonométrica, y el *cateto adyacente* corresponde al cateto que toca el vértice del ángulo nombrado en la función trigonométrica.

Triángulos Oblicuos

Los triángulos oblicuos no contienen ángulos rectos; por lo tanto, cualquier triángulo que no sea un triángulo recto es un triángulo oblicuo.

Triángulos Agudos

Los triángulos agudos son aquellos con todos sus ángulos agudos. Para resolverlos (lados y ángulos) se pueden separar en dos triángulos rectos mediante un segmento de línea recta desde uno de los vértices y perpendicular al lado opuesto del vértice escogido y luego se aplican las funciones trigonométricas definidas en (0.117)-(0.119).

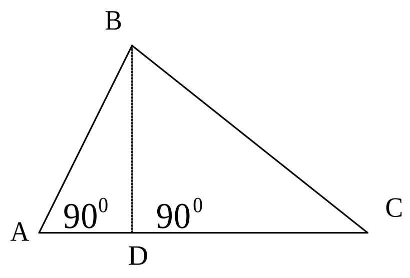


Figura 8 Triángulo agudo (partición en dos triángulos rectos)

Otra forma de solucionar triángulos agudos es mediante la aplicación directa de la *ley de cosenos* o la *ley de senos*.

Ley de cosenos

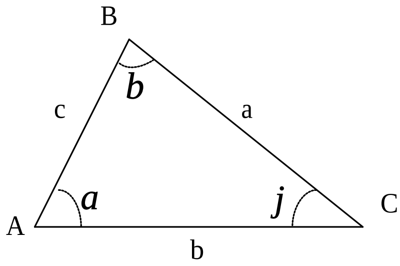


Figura 9 Solución de triángulos agudos

Para un triángulo ABC como el que se muestra en la Figura 9

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi \end{aligned} \qquad (0.120)$$

La ley de cosenos puede utilizarse cuando se conocen todos los lados de un triángulo, o cuando se conocen dos lados y el ángulo formado entre ellos.

Ley de senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\varphi)} \qquad (0.121)$$

La ley de senos puede utilizarse cuando se conoce un lado y dos ángulos (uno de los ángulos debe ser opuesto al lado conocido) o cuando se conocen dos lados y un ángulo (opuesto a uno de los dos lados conocidos).

Al utilizar la ley de senos debe tenerse en cuenta que en ocasiones no habrá solución porque no todas las combinaciones de ángulos y lados forman triángulos. Debe recordarse que el tercer lado de cualquier triángulo debe tener una dimensión mayor que la diferencia entre los lados restantes y menor que la suma de estos otros dos lados.

Un radian es una medida de relación entre la dimensión circular de un arco y el radio, por lo tanto la medida en radianes de un semicírculo es $\pi r / r = \pi$ y,

$$180^0 = \pi \, radianes \qquad (0.122)$$

Una función es periódica si existe un número positivo e, tal que $f(t+e)=f(t)$ para todo el dominio de la función. Por ejemplo, el periodo de una función seno es $2p$ porque $sen(t+2p)=sen(t)$. De igual manera el período para una función coseno es $2p$ y para una función tangente es p.

Es importante tener en cuenta los rangos de las inversas de las funciones trigonométricas (útil en la solución de la cinemática inversa de manipuladores robóticos). El rango de la función inversa es un subconjunto del dominio de la función trigonométrica correspondiente.

Función Inversa	**Rango**
$\text{sen}^{-1}(x)=y$ si y solo si $\text{sen}(y)=x$	$-p/2\le y\le p/2$
$\cos^{-1}(x)=y$ si y solo si $\cos(y)=x$	$0\le y\le p$
$\tan^{-1}(x)=y$ si y solo si $\tan(y)=x$	$-p/2\le y\le p/2$

Tabla 1 Rangos de las funciones trigonométricas inversas

Triángulos Obtusos

Cualquier triángulo obtuso, aquel que contiene exactamente un ángulo obtuso, puede ser convertido en un triángulo recto construyendo un segmento de línea recta desde uno de los vértices y perpendicular a la línea que contiene el lado opuesto al vértice. Luego se pueden aplicar las definiciones de funciones trigonométricas para triángulos rectos en (0.117)-(0.119).

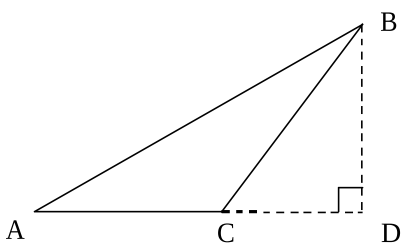


Figura 10 Triángulo obtuso

Otra forma de solucionar triángulos obtusos, directamente, es mediante la aplicación directa de la *ley de cosenos* o la *ley de senos*.

Trigonometría Analítica

Las expresiones trigonométricas contienen funciones trigonométricas y relaciones, pero no =, < o >. No pueden ser simplificadas. De otro lado, las ecuaciones trigonométricas contienen funciones trigonométricas y signos de igualdad. Pueden ser solucionadas para encontrar los valores que las hacen verdaderas. Técnicas algebraicas, como factorización, pueden ser usadas para resolver ecuaciones trigonométricas. Por ejemplo,

$$\cos^2(q) - \cos(q) - 2 = 0\,,$$

puede factorizarse,

$$\left[\cos(q) - 2\right]\left[\cos(q) + 1\right] = 0\,.$$

Asumiendo $\left[\cos(q) - 2\right] = 0$ o $\left[\cos(q) + 1\right] = 0$, entonces, $\cos(q) = 2$ o $\cos(q) = -1$. En consecuencia, en el intervalo $0 \le q \le 2p$, q no tiene valor en $q = p$.

Solución de ángulos a partir de funciones trigonométricas, función atan2

La función *atan2* corresponde a la tangente inversa con rango ampliado entre $(-p\,,p\,)$ (ver Figura 11).

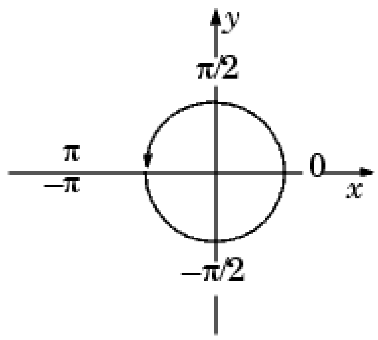
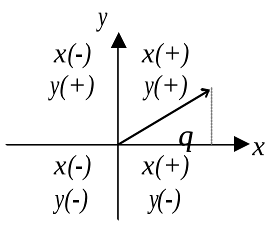


Figura 11 Rangos de la función atan2

Para determinar los ángulos de una solución se debe utilizar la función arco tangente atan2 con dos argumentos, la ordenada y, *y la abscisa* x. *Esta función retorna los ángulos en el rango* $-p \le q < p$ *examinando el signo de* x y de *y*. *La función también detecta si alguno de los argumentos es cero y retorna el valor correcto. Además, la función es uniforme sobre todo el rango de su definición.*



$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} 0 \le q \le p/2 & \text{para} + xy + y \\ p/2 \le q \le p & \text{para} - xy + y \\ -p \le q \le -p/2 & \text{para} - xy - y \\ -p/2 \le q \le 0 & \text{para} + xy - y \end{cases}$$

Espacio después de x

Intentar resolver el ángulo con la función coseno no permite identificar el signo y limita la precisión de la solución porque ésta es dependiente del ángulo mismo, es decir, $\cos(q) = \cos(-q)$ *y* $\left.\frac{\partial \cos(q)}{\partial q}\right|_{0,180} = 0$.

Tampoco es prudente utilizar soluciones dependientes de un cociente de seno o coseno, debido a que conllevaría a imprecisiones cuando el denominador tenga un valor cercano a 0.

Índice

Leigh, D. C. (1989). Nonlinear Continuum Mechanics. New York, McGraw-Hill Book Company.